[0]versióncero

UNIVERSIDAD DE LA REPÚBLICA URUGUAY
Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación
Departamento de Lógica y Filosofía de la Lógica

ELUCIDACIÓN MATEMÁTICA COMO PRÁCTICA [#]

JOSÉ SEOANE

FHCE-UdelaR
SNI-ANII
Uruguay

RESUMEN

El recurso a la elucidación es omnipresente en ciencias y filosofía. Sin embargo, dadas las peculiaridades que aquella adopta en ciertos campos disciplinarios, parece sensato procurar una aproximación al concepto que, en esos casos, recoja tales especificidades. En esa perspectiva, se introduce en Seoane (2003b) el concepto de "elucidación matemática"; Seoane (2017) acentúa su comprensión como *proceso*. Este ensayo se propone radicalizar doblemente ese giro: 1) entendiendo (explícitamente) elucidación como *práctica matemática* y 2) desarrollando el enfoque elucidatorio como *herramienta heurística*. Este trabajo presenta entonces un modelo de elucidación matemática como práctica, cuya finalidad principal es metodológica.

Palabras clave: elucidación matemática, práctica matemática, matematización, filosofía de la práctica matemática.

ABSTRACT

The use of elucidation is very frequent in science and philosophy. However, given the peculiarities that it adopts in certain disciplinary fields, an approach to the concept that reflects such specificity, in each case, seems sensible. In this perspective, the concept of "mathematical elucidation" is introduced in Seoane (2003b); Seoane (2017) emphasizes its understanding as a *process*. This essay aims to radicalize doubly that conceptual turn: understanding elucidation as a *mathematical practice*

[#] Hace algo más de veinte años empecé a interesarme por estos temas. La lista de agradecimientos (si justa) debiera ser enorme. Como no puedo recodar a todas y todos, mi lista será irremediablemente injusta. Pero me pareció aún más injusto no mencionar a personas a las que seguramente este trabajo debe mucho. De las primeras épocas debo agradecer a Aníbal Corti, Fernanda Pallares y muchachas y muchachos que conformaron el viejo grupo de filosofía de las ciencias formales. En el exterior, desde entonces hasta hoy, a Abel Lassalle Casanave, Javier Legris y Wagner Sanz y, en general, a compañeras y compañeros del CONESUL (Coloquio Cono-Sur de Filosofía de las Ciencias Formales), cuyo constructivo acompañamiento crítico ha sido de especial importantancia. En las épocas más recientes, a Alejandro Chmiel, Ignacio Cervieri, Matías Gariazzo, Miguel Molina, Guillermo Nigro, Matías Osta, Valeria Schaffel. En el segundo semestre de 2019 me beneficié largamente de la erudición y paciencia de José Ferreirós. Por supuesto, nadie es responsable (excepto yo) de los errores subsistentes.

and modeling it as a *heuristic tool*. This paper presents a model of mathematical elucidation as a practice, whose main purpose is methodological.

Key words: mathematical elucidation, mathematical practice, mathematization, philosophy of mathematical practice

El recurso a la elucidación es omnipresente en ciencias y filosofía; pueden apreciarse innumerables procesos de clarificación o rigorización en dichos ámbitos. Por ejemplo: precisar, en matemática, la noción intuitiva de "par ordenado" a través de la conocida definición conjuntista $<a,b>=\{\{a\}, \{a,b\}\}$; por ejemplo: caracterizar, en filosofía, la noción relativamente vaga de "conocimiento" a través de una aproximación más refinada como "creencia verdadera y justificada". En tal sentido, algunos autores parecen proclives a una caracterización *general* de la elucidación; en su clásica obra "Palabra y Objeto", Quine explica que la definición de par ordenado ejemplifica qué perseguimos en filosofía cuando elucidamos:

> Esa construcción [se refiere a la caracterización técnica de par ordenado] es paradigmática de lo que típicamente buscamos cuando, con espíritu filosófico, ofrecemos un "análisis" o una "explicación" de alguna "idea" o expresión hasta entonces formulada inadecuadamente. (Quine 1968: 267)

Este autor sigue así la orientación de Carnap, quien entiende de un modo muy amplio el concepto de "explication"[1]:

> Filósofos, científicos y matemáticos frecuentemente producen explicaciones. Pero ellos no suelen discutir explícitamente las reglas que siguen implícitamente. (Carnap 1963:7)

Sin embargo, dadas las peculiaridades que adoptan, en ciertos campos disciplinarios, los criterios de exactitud, claridad y rigor, no parece descaminado procurar una aproximación a aquella empresa intelectual, que reconozca tales especificidades. En esa perspectiva, se introduce y discute en Seoane

[1] Pueden encontrarse ejemplos tomados de lógica y fundamentos de la matemática en "Meaning and Necessity" y de la zoología, química y matemáticas en "Logical Foundations of Probability" -véase al respecto Reck (2012). Esta misma orientación de tratamiento general se encuentra en Hempel (1952).

(2003b y 2006) el concepto de "elucidación matemática"; la misma se entiende, esencialmente, como un *proceso*, pero el énfasis está puesto en su modelización *relacional* y, especialmente, en los criterios de adecuación aplicables a dicha relación. Este enfoque inicial se encuentra en clara continuidad con una importante discusión sostenida por Alberto Coffa y Thomas Moro Simpson (a mediados de los 70) en torno a las modalidades o técnicas elucidatorias[2].

En Seoane (2017) se retoma la caracterización inicial, pero acentuando su comprensión como *proceso* e introduciendo nuevas preocupaciones, más allá de la evaluación de modalidades elucidatorias alternativas. Este ensayo se propone radicalizar doblemente aquel énfasis, a saber: a) entendiendo explícitamente elucidación como *práctica matemática* (beneficiándose de la reciente y profunda reflexión sobre tal noción elaborada por Ferreirós[3]) y b) desarrollando el modelo, decididamente, como *herramienta heurística*. En síntesis, *se procurará diseñar un modelo de elucidación matemática como práctica, cuya finalidad principal será metodológica*.

1.

La reflexión en torno a la elucidación matemática suele introducirse en estrecha conexión con la discusión de las denominadas "tesis". A los efectos de ayudar a la memoria del lector, dos tesis famosas son las siguientes:

Tesis de Church[4]

La noción de "computabilidad" es elucidada por la noción matemáticamente rigurosa "función recursiva parcial" (o equivalentes).

Tesis de Hilbert[5]

[2] Véase Coffa (1975) y Simpson (1975).
[3] Véase Ferreirós (2016).
[4] La aparición de esta tesis se localiza en Church (1935)
[5] La aparición explícita de esta tesis se ubica en Barwise (1977).

La noción de “demostración” es elucidada por la noción matemáticamente rigurosa “demostración formal en un lenguaje de primer orden”.

El modo *tradicional* de introducir las “tesis” y, en forma indirecta, la cuestión elucidatoria, admite el siguiente itinerario expositivo. Entendemos por “teoremas” aquellas proposiciones que articulan conceptos formales (i.e. susceptibles de definición en el contexto de un sistema formal) y cuya demostración formal, en principio, está disponible. En contraposición, se tienen proposiciones que articulan un concepto preformal y un concepto formal y cuya demostración es, por tal razón, imposible. Pero se cuenta con cierta evidencia a su favor, a saber, ciertos elementos de juicio obtenidos en la indagación elucidatoria. Aquellas proposiciones que afirman el éxito de la articulación elucidatoria correspondiente (como las de arriba) se denominan “tesis”. Puesto en forma esquemática -donde “CF” está por “concepto formal” y “CPF” por “concepto pre-formal”:

Teorema		Tesis
↓		↓
CF-CF	➡	CPF-CF
↓		↓
demostración		no-demostración

Figura 1

Este enfoque tradicional de tesis puede catalogarse como *negativo* o, quizá, *heterónomo*. ¿Por qué? Pues, como puede apreciarse en la figura de arriba, se *parte* de las nociones de teorema, formalidad y demostración para caracterizar el fenómeno que aquí interesa -la flecha gruesa en la Fig. 1 intenta hacer visible la prioridad conceptual de la noción de “teorema” respecto a la de “tesis”. Dicho en forma breve: las tesis *no* son teoremas pues *no* articulan conceptos formales y su justificación *no* es una demostración. Así la elucidación es caracterizada a través de estas faltas o contrastes.

Sin dramatizar la situación, es razonable conjeturar que un enfoque a tal extremo ancilar o heterónomo, tienda a inhibir, o, por lo menos, a desestimular una reflexión vigorosa respecto de los rasgos propios del fenómeno referido[6]. En oposición a esa perspectiva tradicional, se propone un enfoque alternativo *positivo*. Puede tal vez comenzarse por el cuadro siguiente -donde “CT” está por “concepto teórico” y “CPT” está por “concepto preteórico”[7]:

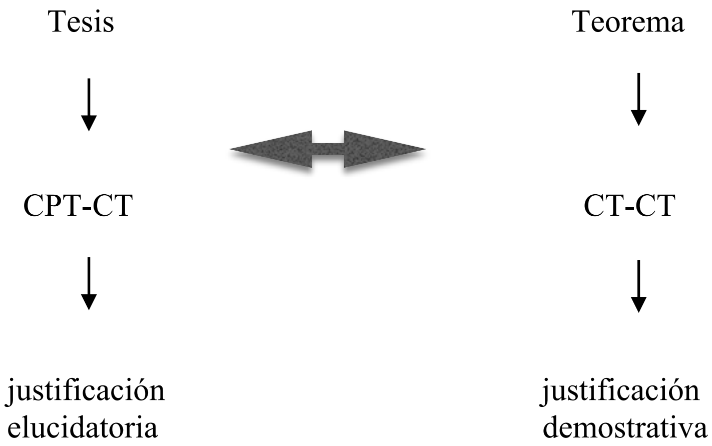

Figura 2

Las diferencias entre las figuras 1 y 2 procuran reflejar (parcialmente) algunos aspectos del cambio de perspectiva propuesto. En particular, esta última permite captar, en forma explícita, una diferente sensibilidad respecto al tratamiento de los mecanismos justificacionales puestos en obra: no se trata de entender la justificación elucidatoria meramente como la contracara de la demostración. Esto no equivale a difuminar la diferencia entre una y otra[8]; se trata de estimular un estudio más autónomo de las estrategias que componen el respaldo argumental elucidatorio. En el plano de la naturaleza de los conceptos involucrados, aunque puede sostenerse que el contraste no se elimina, ciertamente se producen dos variantes importantes. En primer lugar, ya no se trata de una diferencia

[6] Desde quizá mediados de los 90 del siglo pasado los vientos vienen cambiando y hoy hay una discusión cuantitativa y cualitativamente muy importante en relación con las tesis. Sin embargo, no igualmente impetuosa ha sido el debate en relación con el concepto más general de elucidación matemática, aunque, por las razones que anteceden, la articulación entre ambos tópicos es muy profunda.

[7] Esta alternativa aparece, esencialmente, en Seoane (2003b), (2006) y (2017); es reiterada aquí a los efectos de caracterizar el modelo en sus diferentes dimensiones. Es posible afirmar que en la última década se ha consolidado una sensibilidad filosófica más afín a esta perspectiva.

[8] Esa es, por ejemplo, la opción de Mendelson en su excelente y, en ciertos aspectos, pionero artículo en relación a la tesis de Church -véase Mendelson (1990).

cualitativa inmutable sino de una diferenciación histórica. "Concepto teórico" quiere decir "concepto caracterizado de acuerdo con los criterios de rigor matemático vigentes en un contexto determinado"; "concepto preteórico" es un concepto que, aunque matemáticamente valioso, no satisface tales criterios de rigor. Entre otras virtudes, esta modificación permite al enfoque mayor capacidad de modelización, en términos de períodos históricos cubiertos y, consecuentemente, de patrones o cánones de rigor. La pareja CF-CPF consigue captar relaciones conceptuales pertenecientes a (parte de) la historia de la matemática, quizá apenas desde el siglo pasado; una larga y valiosa historia de la disciplina quedaría excluida así de la indagación vía definicional. En segundo lugar, cabe agregar que los *relata* de la relación elucidatoria son conceptos, pero aquí "concepto" poseerá un amplio alcance: permitirá referir a teorías, métodos, nociones, etc., pero lo más importante es que se los entenderá como parte de un contexto al que es imprescindible atender, ya no de forma insular o autosuficiente. En lo que sigue hablaremos, por razones de comodidad expositiva, simplemente de "conceptos" o "nociones", entendidos en un sentido lato y en esta clave. Cabe agregar que, tal como lo refleja la "doble flecha", no se trata de aislar el trabajo de la "tesis"; se trata de atender a su especificidad, apreciable en sí misma, pero, relevantemente, en su interacción con otros conceptos, en particular, por supuesto, con los teoremas.

Así entonces el énfasis en promover una aproximación más autónoma a la comprensión de las tesis no implica negar el interés por las comparaciones que puedan resultar iluminadoras; más aún, resulta estimulante enriquecer el escenario de los tipos de enunciados comparados en la figura 2:

Tesis	Conjetura	Teorema
↓	↓	↓
CPT-CT	CT-CT	CT-CT
↓	↓	↓
justificación elucidatoria	justificación "consecuencial" et alt.	justificación demostrativa

Figura 3

"Mathematicians normally use the name of ´conjectures´ or ´hypothesis´ for a statement that is regarded as probable (or refutable) on the basis of established principles of their discipline…"[9]. Aunque reconociendo explícitamente la heterogeneidad de sus instancias, Ferreirós propone este concepto como extremadamente hospitalario: recogería su extensión enunciados visiblemente diferentes como axiomas debatidos (por ejemplo: el axioma de elección), hipótesis (por ejemplo: la hipótesis del continuo) o conjeturas típicas (por ejemplo: la conjetura de Goldbach). El propósito no es discutir aquí las características o el papel de las conjeturas. Sugerimos, sin embargo, el valor de introducirlas en la comparación, a los efectos de una mejor comprensión de tesis y elucidaciones. Por ejemplo: a diferencia de los teoremas, las conjeturas no poseen demostración y, a diferencia de las tesis, no es que no sea posible demostrarlas, es que, al momento, no se cuenta con las demostraciones correspondientes. Los teoremas son enunciados demostrados, las conjeturas (o sus negaciones) son potencialmente demostrables, las tesis no son demostrables. Esto no equivale a decir que las conjeturas carecen de justificación, ni que su estudio no posea interés independiente. La convicción es exactamente la contraria. Tal justificación suele relacionarse con el estudio de las consecuencias de la conjetura (o sus equivalencias, o su uso implícito en las demostraciones de resultados

[9] Ver Ferreirós (2016), p. 177.

ampliamente aceptados)[10]. En cualquier caso, teoremas y conjeturas pueden usarse para demostrar (en sentido estricto) consecuencias de asumirles, las tesis no. Estas comparaciones, obviamente, no se pretende que agoten el estudio de las tesis; por ejemplo, la propia comparación de estas entre sí merece incluirse como un campo interesante de exploración filosófica e histórica. En tal sentido, un ejemplo pionero de tales esfuerzos puede encontrarse en las finas observaciones que Rav dedica al contraste entre la tesis de Church y la tesis de Hilbert (Rav, 1999). Este rico panorama, más que contradecir, reafirma la convicción acerca del estudio autónomo de las tesis y, en particular, de su modalidad justificacional característica y de la originalidad de su contribución a la actividad matemática.

Pero la diferencia más notable entre el enfoque tradicional y el propuesto en estas páginas debe ubicarse en una variación fundamental en el acento o foco de interés. Mientras en el enfoque tradicional la concentración se radica en la *relación* y, consecuentemente, en el plano *lingüístico y/o semántico*, en nuestro enfoque el énfasis se sitúa *en el proceso histórico intelectual que genera la tesis*. En cierta forma, el derrotero reflexivo por el cual se llega a dichos procesos tiene, como punto de partida, la atención a las tesis, pero desde el punto de vista epistémico, son aquellos prioritarios para la auténtica comprensión de estas. El interés filosófico fundamental son entonces los procesos elucidatorios, deviniendo las tesis en sus productos más importantes. Comprender tales procesos conforma el objeto de nuestra conceptualización de *elucidación matemática*. Esta podría caracterizarse (en forma muy esquemática) así:

La elucidación matemática es un tipo de proceso que se desarrolla al interior de la matemática, susceptible de evaluación racional y cuyo objetivo es clarificar una cierta noción o construcción o actividad cognitiva valiosa (desde el punto de vista matemático) pero deficitaria en términos de rigor, a través de otra que, preservando el núcleo de la primera, es superior epistémicamente (es decir, satisface los criterios de rigor vigentes en la comunidad matemática en un momento histórico dado); estos procesos y sus resultados impactan en diferentes niveles de la actividad disciplinaria.

Es esta, por supuesto, una caracterización aún excesivamente general. Su principal defecto será luego su principal virtud: la vaguedad de los protagonistas directos de la relación elucidatoria.

[10] Valiosas observaciones acerca de los mecanismos justificatorios de las conjeturas y su contribución matemática pueden encontrarse en Ferreirós (2016), especialmente p.176 y ss.

¿Son conceptos? ¿Son teorías? ¿Son procesos o actividades matemáticas? Luego veremos detalladamente la cuestión. Quizá valga la pena reiterarlo: nuestra perspectiva, aunque enfrenta el punto de vista dominante de la elucidación, tributario de la perspectiva tradicional de las tesis, pretende aprovechar sus métodos y sus resultados, enriqueciéndolos y ampliando sus alcances.

2

A los efectos de desarrollar la caracterización arriba elaborada, avancemos sobre cuáles serían los rasgos iniciales y básicos de la noción propuesta aquí de elucidación matemática. Usaremos "conceptos" en un sentido lato (teorías, etc.) y contextualizado para poner en diálogo estas ideas con la discusión de las tesis en su enfoque tradicional (y, por supuesto, la concepción elucidatoria subyacente) [11]:

1. Los dos conceptos protagónicos son tales que uno es superior epistémicamente al otro. El caso tradicional de esta superioridad es que uno de los conceptos es formal (es decir, se encuentra definido en el contexto de un sistema formal) y el otro es un concepto informal o intuitivo (y tal carácter origina dificultades o problemas). Pero, como ya se advirtió, supondría una restricción empobrecedora pensar que esta es la única forma de concebir la superioridad epistémica. Debiera ser evidente que, dependiendo del momento histórico, la mayor rigurosidad puede manifestarse en formas diferentes; además la misma puede integrarse en diferentes combinaciones jerarquizadas de valores, donde, por ejemplo, la fecundidad y la simplicidad pueden figurar [12]. Así mismo resultarían empobrecedoras las restricciones acerca de las dimensiones que pueden, eventualmente, ser objeto de la elucidación[13]. A los efectos de captar el contraste epistémico en forma amplia se prefiere denominar concepto *teórico* al más riguroso (es decir, acorde a las exigencias de rigor del contexto

[11] El texto de esta sección, básicamente, es tomado de Seoane (2017); pero se introducen algunas modificaciones cualitativamente importantes.

[12] Carnap, por ejemplo, sugiere una serie jerarquizada de valores: exactitud, similaridad, fecundidad, simplicidad -véase Carnap (1963): 6-8. Un análisis de estos puede leerse en Dutilh Novaes, C. y Reck, E. (2017)

[13] Por ejemplo, a veces puede pensarse que la axiomatización (como parte de un proceso elucidatorio) puede tener por único objetivo clarificar el dominio de la teoría a elucidar -esto parece sugerirse en Schlim (2013), pág. 58. La perspectiva que se sugiere aquí es más amplia: un proceso elucidatorio puede, respecto de una cierta teoría T_0 entendida como *elucidandum*, eventualmente, proponer una teoría T_1 como *elucidatum* que rigorice la teoría original no en relación a la especificación del dominio, sino que esclarezca o precise una dimensión diferente.

matemático contemporáneo al proceso elucidatorio), y concepto *preteórico* al menos riguroso. En la dinámica elucidatoria suele existir espacio para una crítica (en términos de rigor, precisión, etc.) al concepto preteórico y una defensa (en aquellos términos) del concepto teórico. La exigencia de superioridad del primero respecto al segundo podría denominarse: *condición epistémica.*

2. **El concepto teórico debe hacer justicia al núcleo matemáticamente valioso del concepto preteórico**. Esta caracterización posee una formulación abierta, a los efectos de resultar general. Puede ocurrir (y, de hecho, así ha ocurrido) que se interprete esta exigencia en formas diversas. Aunque no resulta razonable exigir identidad extensional entre ambos términos[14], la misma implica establecer ciertas relaciones intensionales y extensionales específicas, capaces de reflejar cierta capacidad "preservadora" del concepto teórico respecto al concepto preteórico. Los distintos modelos o técnicas elucidatorias suelen suponer variantes en los vínculos extensionales e intensionales pretendidos, aunque los mismos deben ser mutuamente consistentes. Este aspecto suele ser (aunque no necesariamente) el más polémico. Esta condición podría denominarse: *condición sustantiva.*

3. **La elucidación debe entenderse como un *proceso*, inteligible *parcialmente* a través de una relación entre el concepto preteórico y el concepto teórico**. En tal relación cabría distinguir, pues, un concepto *elucidador* y un concepto *elucidado* (o, si se prefiere la terminología carnapiana, un *explicatum* y un *explicandum*). El concepto epistémicamente más fuerte debe jugar el primer papel; al concepto más débil epistémicamente le corresponde el segundo papel. Como es evidente, para que pueda darse esta *relación* explicativa o elucidatoria no alcanza la diferencia de estatus epistémico (apuntada en 1), sino una articulación compleja que es, precisamente, la que vincula sustantivamente ambas nociones (referida en 2). Los diferentes modos de comprender esta relación han dado lugar a sendos modelos o técnicas elucidatorias[15]. Tales modalidades desafían la comprensión metodológica y la exploración histórica. Es importante consignar que la naturaleza del proceso elucidatorio no queda totalmente capturada por la identificación, por decirlo metafóricamente, del "punto de partida", del "punto de llegada" y de la relación elucidatoria pretendida -entendiendo que esta última supone optar por cierta modalidad o técnica. Las motivaciones para la elucidación, las diversas etapas que

[14] Aunque en ocasiones tal exigencia parece reclamarse; véase, por ejemplo, Kalmar (1959).
[15] En Seoane (2006) se introduce una modalidad elucidatoria que enfatiza el papel protagónico del concepto preteórico en la economía justificacional de las tesis. Esta modalidad consiste en una reformulación de aquella que brillantemente Coffa asocia a ciertos esfuerzos tarskianos –véase Coffa (1975). El lector interesado en estas cuestiones se beneficiará asimismo de la lectura de Simpson (1975) y (1995). Diferentes modos de conceptuar la noción preteórica es razonable esperar que impacten en la modalidad elucidatoria - véase Floyd (2012).

pueden constituir el proceso, así como peculiaridades referidas a la codificación y descodificación de la información relevante, hacen del "sujeto elucidador" un centro de atención reflexiva imprescindible.

4. **La elucidación como proceso, en general, produce una justificación racional de la tesis.** Las justificaciones elucidatorias suelen presentarse (en forma más o menos explícita) en los contextos históricos de introducción de los conceptos teóricos como *explicata*; a veces también se encuentran en textos elaborados para la enseñanza, cuando se motiva la introducción de ciertas definiciones. Así mismo formas diversas de entender la relación elucidatoria impactan en los objetivos de tales justificaciones, que pueden adoptar modalidades variadas, correspondientes a distintas etapas del proceso. Como se ha subrayado tradicionalmente, las justificaciones de las tesis no son demostraciones. El origen de tal situación reside en la situación establecida en 1: el distinto estatus epistémico de uno y otro concepto. En general, el concepto epistémicamente inferior no es tratable de acuerdo con los cánones de rigor matemático vigentes en el contexto elucidatorio, y esa es parte esencial de la motivación de tal proceso clarificador; ello no equivale a que su identificación se sustraiga a la discusión racional -es aquella, a veces, una labor delicada-[16], incluso puede ocurrir que la identificación de los avatares de su emergencia requiera ingentes esfuerzos de investigación histórica. Pueden así mismo constatarse diferencias estructurales importantes entre diversos *patrones* o *estrategias* de justificación elucidatoria; algunas exhiben una orientación empírica, otras poseen un talante deductivo. Resulta valioso indagar su interacción, ya que exhibe, cuando se la considera globalmente, una naturaleza reticular, aunque esto no obsta a que en ocasiones se establezca una jerarquización o preferencia fuerte entre tales patrones.

5. **La justificación de las tesis posee una estructura argumental caracterizada por dos momentos fundamentales.** Un momento relevante de la justificación (frecuentemente, el menos polémico) consiste en mostrar que se cumple la condición 1, es decir, la condición epistémica -tal esfuerzo es, en general, explícita y parcialmente motivado por una crítica al concepto preteórico en uso, a causa de su inadecuación a los cánones de rigor vigentes. Otro momento fundamental está orientado a evidenciar que se cumple la condición 2, es decir, la condición sustantiva. Este último tramo de la justificación resulta informado por el ideal o modelo elucidatorio referido en 3. En general, la estructura justificacional sugiere dos estrategias críticas muy netas: aquella que apunta a

[16] Sobre la importancia de esta labor véase, por ejemplo, Carnap (1963), pág. 4 -citado por Carus (2008), pág. 278.

debilidades en la satisfacción de la exigencia epistémica y aquella que apunta al fracaso en el cumplimiento de la exigencia sustantiva. Como se advierte, existen "momentos" de justificación elucidatoria que escapan a este esquema (referido a la justificación de las tesis); por ejemplo, la identificación y discusión del concepto preteórico y la (eventual) defensa de una reformulación.

6. **Los procesos elucidatorios y las tesis forman parte de la ecología de la matemática.** Es evidente que puede criticarse una demostración y, consecuentemente, revisarse el estatus de teorema de una proposición. De un modo análogo, puede someterse a escrutinio racional la justificación de una tesis y, eventualmente, ofrecerse razones para rechazarla. Esta observación sugiere una idea clave: las tesis (y, en particular, sus justificaciones) poseen su "historia", portadora de un interés epistémico específico. No debiera resultar sorprendente: los teoremas (y, en particular, sus demostraciones) poseen la suya. Muchas veces las tesis no alcanzan una formulación explícita; ello no equivale a la inexistencia del proceso elucidatorio respectivo, ni a la inhibición de su impacto en la vida matemática. Por ello, cuando se las devela, se gana en una mejor comprensión de esta última. La ubicuidad de las tesis y su interacción con los teoremas o la importancia de la discusión elucidatoria respecto a la selección de axiomas de una teoría, entre otras interacciones, confirman el carácter polifónico de la racionalidad matemática. Dicho en forma concisa: no solo de demostración vive la matemática.

Estas seis características reflejan aspectos decisivos de los procesos elucidatorios en el campo que aquí interesa. El lector ya habrá advertido, sin embargo, que ellas no permiten caracterizar unívocamente un concepto de "elucidación matemática"; más bien abren explícitamente (a partir del modo de entender 3) un espectro amplio de alternativas. Tal posibilidad no es contemplada simplemente como cautela teórica o previsión hipotética; de hecho, a lo largo de la historia de la matemática, se han puesto en obra modalidades diferentes de comprensión de la empresa elucidatoria. Más aún, los filósofos que han prestado atención a tales procesos (más allá de cómo los denominen) han contribuido activamente a la discusión y multiplicación de alternativas. Con relativa independencia de tal diversidad, el punto que se pretende destacar es, principalmente, el interés de estudiar la naturaleza de los procesos elucidatorios, integrando un enfoque más bien *estructural*, es decir, atento a la relación elucidatoria (*explicandum*, *explicatum*, articulación pretendida entre ambos) con un enfoque *procesal*, es decir, sensible al proceso de construcción de la respuesta elucidatoria, las estrategias de justificación y de crítica, las relaciones entre tesis y teoremas, la articulación entre elucidación y teoría, etc. Un análisis especialmente concentrado en los aspectos estructurales se desarrolló en un trabajo inicial[17]; más recientemente se procuró, fundamentalmente, atender a los aspectos argumentativos vinculados a las tesis[18]. En general, se espera que una exploración amplia de tales procesos auspicie una comprensión enriquecida de la racionalidad matemática. En este ensayo, como ya se adelantó, se intentará pulir la caracterización de aquellos, explotando los avances filosóficos recientes en la conceptualización de la práctica matemática. Más específicamente, se propondrá entender *el proceso elucidatorio como práctica matemática*. ¿Es ello posible?

3.

Aunque el impulso manifiesto y vigoroso de la filosofía de la práctica matemática como corriente filosófica puede decirse que es relativamente reciente, existe una interesante diversidad de perspectivas respecto a su concepto central[19]. Una elaborada, consistente y profunda caracterización de dicha noción es ofrecida por Ferreirós[20].

Este autor se propone un acercamiento al concepto de "práctica matemática" por aproximaciones sucesivas. En primer término, enfatiza la necesidad de introducir, en el horizonte del análisis, el recurso a la comunidad matemática. Una razón general es que difícilmente podría entenderse una práctica, sin hacer foco sobre sus "practicantes". En palabras del autor:

> …there is no practice without practitioners. Any reasonable analysis of the factors that regulate mathematical practice, making mathematical knowledge possible, must include the resources and abilities of the single mathematician, and his or her interaction with others in the community (Ferreirós 2016: 28)

[17] Véase Seoane (2006).
[18] Véase Seoane (2017).
[19] Dos artículos recientes enfocan directamente la cuestión: Giardino (2017) y Carter (2019).
[20] Véase Ferreirós (2016).

Tal recurso, además, presta un servicio de especial importancia en la comprensión de la adquisición de las habilidades propias del campo disciplinario. En general, la práctica matemática es, en muchos aspectos, similar a otras prácticas, tales como andar en bicicleta o jugar al tenis; estas últimas poseen normas explícitas, pero también (y esencialmente) normas implícitas. Y la adquisición de tales normas se procesa en el contexto comunitario:

> In relation to such implicit norms, other agents typically act as regulators—the community is most relevant to an individual's attainment of proficiency; if you want to learn how to dance, or how to sail a yacht, you become an apprentice to those who already know. This is the way mathematics was learned back in time, e.g., around 1400. (Ferreirós 2016: 29)

En segundo lugar, resulta valiosa una orientación original sugerida por este filósofo y que es introducida, sugestivamente, como alternativa a una concepción ampliamente extendida. Tanto los "programas de investigación" de Lakatos como los "paradigmas" de Kuhn se entienden rigiendo, monopólica y excluyentemente, la totalidad de la actividad científica correspondiente. Así la vocación totalizadora de tales marcos implica niveles elevados de generalidad o abstracción. Esta tendencia incluye, en modo análogo, el esfuerzo de Kitcher por caracterizar la práctica matemática. Ferreirós se ubica críticamente respecto de tal orientación general; esa actitud lo aleja de Lakatos y Kuhn y, por los mismos fundamentos, de la perspectiva kitcheriana[21]. El énfasis en esta convicción crítica, por parte del filósofo, resulta inequívoca:

> One can hardly overemphasize the importance of avoiding such temptations to erect all-encompassing frameworks that supposedly would reign supreme over the conduct of science. (Ferreirós 2016: 29)

Una consecuencia interesante (a los fines presentes) de la mudanza metodológica propuesta es que prefigura una imagen sensiblemente diversa de la historia de la matemática. Para decirlo metafóricamente, los autores objetados promueven una concepción del desarrollo histórico de la ciencia, podría decirse, "secuencial excluyente" -como secuencia o sucesión, respectivamente, de los programas o paradigmas o prácticas en cuestión. Tal imagen secuencial excluyente es armónica con

[21] Véase Khun (1962), Lakatos (1970) y Kitcher (1984).

el carácter totalizador de aquellos marcos y este rasgo juega un papel decisivo respecto a su alta generalidad y su conceptuación como pauta exclusiva.

Contrariamente, el concepto de "práctica matemática" de Ferreirós evita la aspiración totalizadora y procura, consistente con ello, un nivel sensiblemente menor de generalidad; este ajuste implica una atención novedosamente fina a la actividad concreta de las comunidades matemáticas (emplazadas en diversos contextos geográficos y ubicadas en diversos momentos históricos). Es decir, la alternativa sugerida propone que

> Our mathematical practices will be at a lower level of generality, and they will be linked with a recognizable type of symbolic framework (formulas or diagrams of a certain kind) employed by the agents to solve problems in the pursuit of particular goals. In retrospect, it will always be possible to link such mathematical practices with particular mathematical theories (given that we, today, possess a large body of mathematics). But, in fact, the natural thing is to keep separate, at the level of analysis, the practice of mathematics and its products.Attention to *processes*, and not merely to more or less perfect results, is characteristic of studies of mathematical practice. (Ferreirós 2016: 29)

Las prácticas matemáticas, desde esta perspectiva, no poseerán entonces el nivel de alta generalidad, propio de los marcos totalizadores. No obstante, identificar una práctica supone reconocer los recursos simbólicos puestos en obra por los agentes para llevarla adelante. Más específicamente, el "symbolic frame" que es usado para resolver los problemas al procurar sus "particular goals". Así pues, el valor de la generalidad de la teoría no desaparece; el vínculo o articulación entre práctica y teoría, por supuesto, no se ha desvanecido. El punto importante que debe retenerse es que la perspectiva no posee ahora un carácter reduccionista "teórico". En una doble acepción: ni desde el punto de vista de la reconstrucción histórica (evitación de una concepción "whig"), ni desde el punto de vista de la densidad del fenómeno a estudiar (evitación de una concepción excluyentemente "lingüística" del mismo). En particular, estudiar la práctica matemática supone prestar atención no exclusivamente a sus *productos*, sino también (y en forma profunda) a los *procesos* que se constituyen en su interior.

Un tercer aspecto relevante es la especificación de los objetivos de tal práctica. Ferreirós recurre a la distinción entre *saber-cómo* (know-how) y *saber-que* (know-what). Dado que se propone caracterizar la práctica matemática en forma tal que aporte a la epistemología de la disciplina, es imprescindible resaltar la "orientación teórica" de esta. Es decir: a la matemática no le alcanza el saber-cómo, reclama el saber-que. En sus palabras:

> Our third requirement shall be that mathematical practices incorporate a theoretical orientation, which is characteristically linked with attention to some epistemic values (such as accuracy or precision, consistency, simplicity) and with the goals of the practice. (Ferreirós 2016: 29)

Este imprescindible énfasis teórico, naturalmente, auspicia la atención a sus resultados característicos en este contexto: teoremas, teorías, demostraciones. Pero, como se consignó antes, la agenda se amplía. Por ejemplo, problemas, conjeturas y métodos se incluyen también como objetos dignos de interés filosófico. El autor nos recuerda el papel de estructuración de una teoría que puede, eventualmente, cumplir una conjetura o el interés que, en relación con un teorema, puede concentrar el método utilizado, más allá del propio resultado obtenido a través de él. Ferreirós dista mucho de reducir el *modo* de manifestarse tal vocación teórica. En términos occidentales, estaríamos tentados de identificar la misma (en el caso de las matemáticas) con la exigencia de la demostración, sin embargo, la atención prodigada por el autor a las prácticas matemáticas justificativas de la matemática china, nos muestra que estas poseen originales rasgos que difícilmente puedan subsumirse sin pérdida bajo aquella categoría. La idea central parece ser que lo perseguido no es la verdad de una sentencia, sino la corrección de un algoritmo. La preocupación entonces sería que, al dársele un input determinado al algoritmo en cuestión, el output fuera el adecuado. Parte sustantiva de la tarea de asegurar la generalidad de la eficiencia algorítmica, consistiría en reducir los algoritmos más complejos a algoritmos más simples, cuya corrección estaría ya garantizada. Pero esta es apenas una descripción rápida de un tipo de procesos cuya comprensión cabal excede largamente la competencia del autor de estas líneas[22]. El punto sobre el cual se aspira a llamar la atención es apenas este: vocación teórica no debe identificarse aquí con aspiración a la demostración (al menos en el sentido tradicional del término).

[22] En este punto se ha seguido el análisis de Chemla (2012b).

En general, de un modo similar al contraste metodológico antes consignado, es también útil en este contexto, partir de la perspectiva tradicional para apreciar mejor los rasgos discordantes y originales del presente planteo. Así lo hace el autor:

> Traditionally, philosophers of science have focused on theories, and in our field the focus has been on axiomatized mathematical theories, organized internally into a proof structure based on explicit principles, the axioms. Traditionally, theories are conceived as static, ready-made abstract objects. From the standpoint of practice, however, theories are one (and only one) of the products created by the mathematical community; and any given theory is in a dynamic process of reconception and changes in presentation. Other highly relevant products put forward by mathematicians are problems, conjectures, and methods. (Ferreirós 2016: 31)

Esta nueva sensibilidad intelectual, a la vez que amplía el campo de aspectos o dimensiones a considerar, expande, consecuentemente, el espectro de recursos imprescindibles para estudiarlos. Debe tomarse en cuenta, además, como ya se consignó, que el interés no se restringe a resultados o productos acabados, sino a la diversidad de procesos que se despliegan en la práctica. Ferreirós señala que podemos considerar “problem solving, theorem proving, and theory shaping as the most important goals of mathematical activity”. Así descripta el área temática a estudiar, no debiera sorprender la concurrencia de diversas disciplinas para abordarla y, luego, la relevancia filosófica de los emprendimientos interdisciplinarios, a veces como fuentes de inspiración, a veces como fecundos controles epistémicos.

El autor resume de esta forma su concepción de “práctica matemática” (a los efectos de posibilitar el análisis epistemológico):

> *mathematical practice is what the community of mathematicians do when they employ resources such as frameworks (and other instruments) on the basis of their cognitive abilities to solve problems, prove theorems, shape theories, and (sometimes) to elaborate new frameworks.* (Ferreirós 2016: 33)

Dos cuestiones quizá exijan un brevísimo comentario. En primer término, el marco simbólico es resaltado como instrumento (aunque no es, por supuesto, el único) y este énfasis auspicia un interés más general por los mecanismos de expresión matemática (por ejemplo: las notaciones). En segundo lugar, la amplitud del concepto "comunidad matemática". La lectura de la cita anterior podría despistar al lector acerca de cuál es el universo que se pretende atender cuando se la refiere. La expresión "community of mathematicians" conduce a pensar, exclusivamente, en los investigadores, tal cual ha sido el enfoque tradicional. Pero, como explícitamente apunta Ferreirós más adelante, a los efectos de estudiar la práctica matemática tal noción debe ser más amplia; ella debiera incluir estudiantes y profesores de matemática. Tal ampliación es consistente con el enriquecimiento general de la agenda filosófica: procesos y productos que, desde el punto de vista tradicional, carecían de interés, se tornan ahora dignos de la mayor atención reflexiva. Pero esta debe entenderse adecuadamente. El alcance o extensión específica de la noción "comunidad matemática" debe ajustarse contextualmente: si, por ejemplo, la discusión versa acerca de las actividades que refiere la cita anterior, parece evidente que debe adjudicársele una extensión restringida a los investigadores. Pero, si el análisis alcanzase cuestiones tales como la pervivencia de algunas prácticas en el contexto educativo matemático, la extensión debiera ser aquella más amplia.

En la medida que la caracterización de arriba contempla una categoría tan amplia como la "resolución de problemas", las propuestas elucidatorias podría entenderse que caen naturalmente bajo la misma. Es decir, bastaría pensar se trata de respuestas a un tipo o clase de *problemas*, a saber, aquellos que surgen de una tensión entre el uso prominente de ciertos recursos (nociones, métodos, teorías, etc.) y los criterios vigentes de rigor en un contexto histórico dado. Los procesos elucidatorios procurarían la resolución del conflicto o tensión, preservando la potencialidad positiva de tales recursos mediante recursos que se adecuan a las exigencias contextuales de rigor. En tal sentido, *resulta perfectamente consiste entender la elucidación como práctica matemática*: procesos elucidatorios tales como la rigorización de la noción de número (propuesta por Dedekind) o el refinamiento de la noción intuitiva de conjunto a través de su axiomatización (por ejemplo: Zermelo-Fraenkel) pueden considerarse, en forma natural, como ejemplos de tal "práctica matemática". Ahora bien, a favor de tal decisión clasificatoria, sería conveniente apelar, explícitamente, a la caracterización general de "práctica matemática" a los efectos de captar mejor este *tipo* particular de conflicto o tensión. Dicho directamente, ¿cuáles serían los beneficios teóricos de esta adscripción?

4.

La influyente y seductora imagen elaborada por Kuhn de la historia de las ciencias naturales a partir de su clásica obra *The Structure of Scientific Revolutions*, puede sugerir un tratamiento análogo de las matemáticas. Baste recordar, por ejemplo, cómo plantea Gillies la cuestión (cursivas nuestras):

> The most important text here is of course Kuhn´s Structure of Scientific Revolutions (1962). Though most historians and philosophers of science (including the latter Kuhn!) would disagree with some of the details of Kuhn´s 1962 analysis, it is, I think fair to say overall picture of the growth of science as consisting of non revolutionary periods interrupted by the occasional revolution has become *generally accepted*. … Given the interest in Khun´s work in the 1960s and early 1970s it is understandable that this question should have suggested itself to historians of mathematics working at that time. (Gillies 1992: 1-2)

Como se recuerda, la cuestión acerca de si pueden existir o no revoluciones en matemática se conoció como el debate Crowe-Dauben; Crowe defiende la inexistencia de revoluciones en matemáticas y Dauben argumenta su existencia. Ahora bien, ¿cuál es, rápidamente, esa imagen compartida, "generally accepted" del desarrollo científico aludida por Gillies? La misma parece dejarse captar, groseramente hablando, por una sucesión o secuencia de períodos, una vez superada la etapa pre-científica, caracterizada por la intercalación de momentos de imperio excluyente de un paradigma (ciencia normal) y momentos tormentosos de debate interparadigmático que concluye con la imposición de uno nuevo (revolución). Una imagen ayudará a fijar la idea:

Período Pre-científico | Paradigma 1 | Etapa revolucionaria | Paradigma 2

Figura 4

¿Qué ocurre cuando se discute el desarrollo histórico de las matemáticas? Algunos casos propuestos como cambios revolucionarios en matemáticas han sido el descubrimiento pitagórico de los inconmensurables, la geometría analítica de Descartes, la irrupción del cálculo infinitesimal, la rigorización de Cauchy, la teoría de conjuntos de Cantor y el análisis no-estándar de Robinson. Más allá del debate particular, es importante retener en este contexto, no exactamente la imagen retratada en la Figura 4, sino la suposición que subyace a la misma aplicada a nuestro desafío específico, a saber: la convicción del desarrollo matemático como una secuencia única, donde se suceden y excluyen (aunque con modalidades diversas) distintos momentos (al modo de los paradigmas en Kuhn, los programas en Lakatos, o, específicamnte, las prácticas matemáticas en Kitcher). Es decir:

momento 1 | momento 2 | momento 3 | momento 4

Figura 5

La perspectiva de la práctica matemática propuesta por Ferreirós (como se señaló antes) puede considerarse que supone, en una forma precisa, una alternativa "estructural" a la concepción retratada en la Figura 5. En particular, podría decirse que dialoga controversialmente (en forma directa) con una instancia de dicho esquema, a saber: la concepción kitcheriana.

Kitcher modela la práctica matemática a través de una quíntupla, <L, M, S, R, Q>, donde "L" representa el lenguaje usado, "M" la perspectiva metamatemática, "S", el conjunto de sentencias, "R" los métodos empleados y "Q" el conjunto de cuestiones o problemas[23]. Según el análisis de Ferreirós, la perspectiva de Kitcher se apoya en dos ideas: el desarrollo matemático exhibe períodos en que domina una práctica matemática o "framework" (el equivalente a la "ciencia normal" khuneana) y períodos de transición, ocasionados por tensiones al interior de la quíntupla y que reclaman innovación, la cual vendrá con un nuevo framework (el equivalente a las revoluciones científicas khuneanas). Puede apreciarse perfectamente ahora cómo entender el planteo kitcheriano como instancia del esquema de la Fig. 5.

¿Cuál es la visión alternativa propuesta por Ferreirós? Un primer aspecto, resaltado antes, es el diverso nivel de generalidad de las prácticas en comparación con otros marcos posibles (como, por ejemplo, los paradigmas). Aquellas se pretenden identificar en base a una mayor cercanía metodológica respecto del accionar particular de las comunidades matemáticas específicas -accionar que consiste, principal aunque no exclusivamente, en resolver problemas, demostrar teoremas y diseñar teorías. Adviértase que esta preferencia básica supone una estrategia que, a falta de una denominación mejor, podría llamarse más "inductiva", más apegada al "grano fino" de la práctica. Esta nueva concepción sugiere así una especie de "vía" distinta de aproximación al desarrollo de la matemática; tal distinción se apreciará, especialmente, en la constitución de una agenda y una metodología alternativas. En segundo lugar, discrepa con el punto de vista tradicional, en tanto su comprensión de la práctica matemática con un nivel de generalidad diverso a los marcos referidos, conduce naturalmente al abandono de la autosuficiencia totalizadora, rígida, característica de aquellos. Las prácticas son menos generales que los marcos tradicionales pero, especialmente, ni son extraordinariamente abarcadoras, ni son rígidas, ni funcionan monopólica o excluyentemente. En cierta forma, este distanciamiento implica abandonar la imagen "secuencial excluyente" tradicional antes reseñada. Luego resulta natural la observación de Ferreirós (cursivas nuestras):

> It is a key thesis of the approach defended here that *several different levels of practice and knowledge are coexistent, and that their links and interplay are crucial to mathematical knowledge*. This becomes especially obvious when one clears one's eyes from the

[23] Véase Kitcher 1984, especialmente pág. 163 y ss.

foundationalist reductionism that was a frequent feature of twentieth-century philosophy of mathematics. (Ferreirós 2016: 35)

La ruptura con la imagen “secuencial excluyente” auspicia así una imagen “reticular inclusiva”, donde no solo no se trata ya de representarse el desarrollo de la matemática como una secuencia de momentos, caracterizados por marcos excluyentes, rígidos y totalizadores, sino por la coexistencia e interacción flexible de múltiples prácticas. La nueva perspectiva quizá podría lucir esquemáticamente así -donde las líneas representan “prácticas” que se despliegan temporalmente (eventualmente quedando truncas), y las flechas interacciones entre aquellas prácticas:

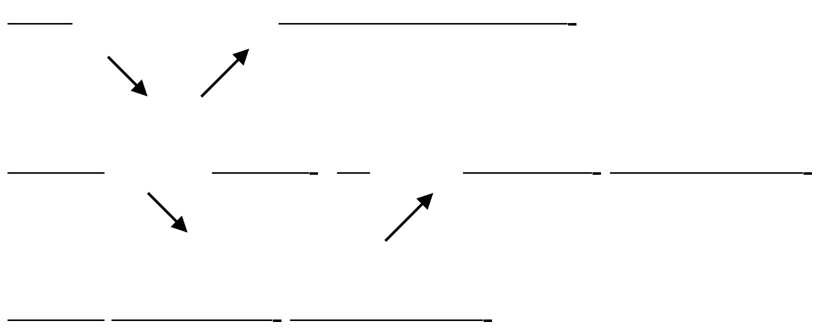

Figura 6

Un apunte importante en relación con la Fig. 6 es el siguiente. La imagen puede promover una interpretación equivocada de la referida coexistencia. Pues, aunque puedan reconocerse y reproducirse las prácticas históricamente previas, difícilmente pueda aceptarse su inmutabilidad y sustracción del devenir histórico. Podría quizá catalogarse tal pervivencia de prácticas pretéritas en un cierto contexto dado, como fuertemente preservadora, pero no exigir identidad. Entre otras razones, por el efecto de la propia coexistencia e interacción. En consecuencia, la coexistencia activa de las mismas supone una pervivencia y, en alguna medida, una variación, cuya dinámica probablemente evidencia una riqueza históricamente determinable, estrechamente relacionada con el agente matemático. No obstante, por razones de claridad expositiva, se hablará de la pervivencia sin más de tales prácticas, salvo en casos que la observación anterior sea argumentalmente relevante.

Esta original perspectiva de la práctica matemática posee diversas dimensiones y alcances[24]. Se hace necesario pues avanzar, en forma gradual, en su descripción a la vez que, concomitantemente, en la consideración de los beneficios teóricos correspondientes a la adscripción del concepto de elucidación matemática a esta categoría más amplia.

En una primera aproximación entonces, cabría destacar que la especificación elucidatoria supone aislar un tipo de "unidad de análisis" que dista mucho de constituirse como un marco totalizador; se trata de una estructura o patrón que, para usar la terminología de Ferreirós, posee "baja generalidad". Y, consistente con tal característica y afín a la orientación metodológica propuesta, la indagación elucidatoria se propone captar una variedad de estilos de rigorización que solo puede lograrse vía una metodología más "empírica", menos "apriorística". Ambos aspectos se encuentran adecuadamente recogidos en esta conceptualización de la práctica matemática. Mirando retrospectivamente, el tratamiento de la elucidación matemática como proceso (tal como fue planteado en Seoane (2017)) era un enfoque específico que exhibía aquellos rasgos; su inclusión ahora en este marco evidencia que, sin pérdida de especificidad, la elucidación pertenece a una clase más amplia de fenómenos relevantes para la comprensión de la matemática. La legitimidad de su estudio y de las opciones metodológicas privilegiadas se ven así fortalecidas.

Estos dos aspectos de la práctica matemática (reconocibles como centrales para la indagación elucidatoria), por supuesto, no agotan la articulación virtuosa entre ambos conceptos; corresponde, en consecuencia, desarrollar un análisis más específico de la misma. En particular, respecto de dos cuestiones de la mayor importancia: la consideración del cambio o emergencia de novedad matemática (en su variante propia, es decir, como *cambio elucidatorio*) y la especificidad de la articulación e integración de la práctica elucidatoria en una red de prácticas, es decir: la *dinámica elucidatoria*. Estos dos asuntos (cambio y dinámicas elucidatorias) serán el objeto de los próximos apartados y, como se verá, se encuentran estrechamente conectados.

[24] La perspectiva reticular inclusiva parece especialmente potente como clave de comprensión del desarrollo matemático, pero surge, naturalmente, la cuestión acerca de su alcance. ¿Es susceptible de algún grado de generalización en relación con otras prácticas científicas?

5.

El abandono de las unidades de análisis "totalizadoras" parece auspiciar (en la perspectiva analizada) la repulsa de una imagen secuencial excluyente del desarrollo matemático. Tal objeción y la preferencia por la estructura reticular inclusiva son las dos caras de una misma medalla. Por supuesto, la estructura reticular inclusiva supone dos aspectos: la no secuencialidad y la coexistencia e interacción entre aquellas prácticas. En tal sentido, resultan de especial interés (a los fines de este ensayo) los casos en que se advierte "that several different levels of practice and knowledge are coexistent". Ferreirós ofrece una ejemplificación histórica que ilustra elocuentemente esta coexistencia sustantiva. Siguiendo a este autor, el período que abarca, aproximadamente, desde mediados del siglo XVIII hasta mediados del siglo XX permite apreciar una mudanza profunda en relación con la percepción de la matemática. Ese proceso de transformación es el que supone el cambio acerca de, podría decirse, la naturaleza de su objeto: desde las magnitudes a las estructuras teórico-conjuntistas. En el primer período

> Functions and even numbers were conceived as *relations* between magnitudes; their "existence" was derivative from the obvious, real-world existence of magnitudes such as physical lengths, times, and volumes. (Ferreirós 2016: 35)

En relación al segundo, puede afirmarse que

> In 1950 it was usual to emphasize that "all mathematical theories can be considered as extensions of the general theory of sets" … a definition that does not point to the real world, but to an inner world of "pure mathematics." Functions and numbers were now set-theoretic constructs, and their "existence" derived from the basic existential assumptions embodied in the axioms of set theory—on the understanding that mathematical existence has nothing to do with real existence. (Ferreirós 2016: 36)

Este es un cambio de enjundia en la interpretación de la naturaleza de los objetos de la disciplina; no obstante, muchas prácticas permanecen relativamente inalteradas. Es decir, no son afectadas en su continuidad, cesadas o interrumpidas por el cambio producido. Por ejemplo: la integración y diferenciación de funciones -más allá de las conquistas en términos de rigor- u operaciones básicas con naturales y racionales -aunque estos ya no se entiendan como razones de magnitudes, sino como pares de enteros. Tales prácticas son perfectamente identificables, no obstante es conveniente considerarlas en forma cuidadosa: dependiendo del contexto histórico y el agente matemático. Pues, si se atiende a estos, quizá varíen las dosis de cambio y continuidad que presentan. La conclusión de Ferreirós es que (itálicas J.S.)

> Acquaintance with these and many other practices was—and continues to be—*an essential part of the process of becoming a mathematician, of gaining mathematical knowledge*. This implies that, in any historical period, many different mathematical practices coexist, and the same applies to *different strata of mathematical knowledge*. It seems that the "normal science" approach followed by Kitcher was still heavily influenced by the typical reductionism of foundational studies and traditional philosophers. (Ferreirós 2016: 37)

Cuatro lecciones deja el análisis de este ejemplo. En primer lugar, el cambio (aún un cambio de gran enjundia como el arriba descripto) no supone necesariamente cese absoluto o alineación convergente máxima de la totalidad de las prácticas vigentes en etapas anteriores a la transformación. La sucesión de marcos totalizadores en consecuencia no capta este fenómeno; en contraposición, la estructura reticular aparece como mucho más prometedora -en términos descriptivos históricos. En segundo lugar, las prácticas (como unidades de análisis) parecen requerir una dosis considerable de flexibilidad y plasticidad. Quizá podría pensarse que, por ejemplo, modalidades definicionales, que guardan ciertas relaciones conceptuales nítidas respecto de ciertas formas operacionales, pueden decaer y estimulan así una suerte de "variación" o "enriquecimiento" de la práctica en cuestión, permitiendo registrar la innovación definicional y, a su vez, retener la continuidad operacional. Este tipo de procesos es, en tercer lugar, una forma de entender la emergencia de innovación matemática, que involucra estratos innovadores y cuya novedad no supone la clausura cuanto alguna forma de mudanza, de los estratos previos, combinando de una forma intelectualmente desafiante (desde el punto de vista de la interpretación histórica y la comprensión filosófica) cambio y permanencia. En cuarto lugar, Ferreirós provee una respuesta sólida a estos desafíos: la tesis de la emergencia, vía tal proceso de articulación de prácticas, de estratos o niveles de conocimiento estructurados como red.

Podría resumirse la situación así: la estructura reticular no ofrece, exclusivamente, una más fiel descripción histórica, sino que sugiere el importe epistemológico de tal estructuración. Los procesos de comprensión matemática se apoyan fuertemente en la estructura reticular: para que una persona pueda *convertirse* en matemática profesional, para *aprender* matemática, la interacción de los distintos estratos es esencial. Es decir: la comprensión matemática no puede prescindir de la dinámica de estos diferentes "estratos", i.e, de la coexistencia activa de las diversas prácticas. En palabras del autor:

> In all cases I can think of, the analysis of a certain mathematical framework (of its concepts and symbols, statements, methods of reasoning, and problems) requires us, at the very least, to consider its connections with another level of practice (or more than one), its links with other frameworks and knowledge strata. This is particularly the case when the framework under analysis is not a fully developed formal system, because only formal systems have been designed to "stand alone," so to speak. (Ferreirós 2016: 37-38)

El filósofo describe muy gráficamente cómo, en las distintas etapas del aprendizaje de la noción de número, diversos estratos del conocimiento juegan su papel: a contar se aprende en casa, a calcular en la escuela y la estructura de los naturales, eventualmente, se aprende en la universidad. Sin desmerecer un ápice la contribución de la construcción y estudio de los sistemas formales al conocimiento matemático, solo una mirada cegada por tal brillo puede no apreciar la multiplicidad de estratos involucrados en la comprensión matemática, esencial a la inteligencia de la historia de la disciplina, así como del aprendizaje matemático.

Ferreirós señala como un aspecto central el hecho de que una práctica novedosa, que encarna o supone conocimiento matemático superior, no necesariamente cancela la práctica previa, aunque el conocimiento corporeizado en esta pueda ser "derivado" del correspondiente a la primera. Es cierto que los sistemas formales han sido diseñados para "estar solos"; el punto es que nos interesan matemáticamente… por su inserción en la red de las prácticas. Aún cuando se los usa para establecer resultados metateóricos, su interpretación (es decir, el significado que les atribuimos y, luego, la razón de su importancia e impacto) proviene de aquella inserción. El "principio de complementariedad" propuesto por Ferreirós, como se verá más adelante, da cuenta adecuadamente de esta situación.

La estructura reticular es sugerida por Ferreirós a través de diversas metáforas (red, tapiz, tela de araña); todas ellas intentan evidenciar la multiplicidad y coexistencia activa de las prácticas, especialmente, la simultaneidad de su vigencia y el papel central de su interacción en la vida matemática. Relevantes aspectos de las elucidaciones que han sido descriptos y subrayados por diversos autores (véase, por ejemplo, Etchemendy (1990) y Seoane (2017)) encuentran en estas características de la práctica matemática identificadas por el filósofo, una *explicación* sólida.

En primer lugar, cuando se piensa las elucidaciones matemáticas como prácticas generadoras de cambio, aquellos rasgos resultan especialmente valiosos en términos explicativos. El pasaje de un concepto preteórico a un concepto teórico no supone la cesación de todas las asociaciones, conceptualizaciones y operaciones asociadas al primero. Dicho de otra forma, aunque en algunos contextos o "estratos" cognoscitivos pueda apreciarse una suerte de "sustitución" del concepto preteórico por el teórico, eso no equivale a la clausura o desvanecimiento cabal del primero. Es evidente, por ejemplo, que, desde el punto de vista del aprendizaje y la comprensión de nociones tales como "consecuencia semántica" o "demostración", aunque se posean contrapartidas matemáticamente rigurosas de las mismas (las respectivas nociones teórico-modélica y teórico-demostrativa), en el aprendizaje, los conceptos preteóricos permanecen cumpliendo su imprescindible papel. Es decir: en los procesos de comprensión matemática, el concepto preteórico no desaparece de escena (en forma absoluta), una vez que se acepta como exitoso un cierto esfuerzo elucidatorio que desemboca en el concepto teórico correspondiente. Más aún: la subsistencia (parcial) de la práctica previa y su coexistencia con la práctica actual, en diversos estratos cognoscitivos, resulta esencial para entender el aprendizaje matemático y es perfectamente compatible con el éxito del cambio elucidatorio[25].

En segundo lugar, el papel que las nociones preteóricas suelen jugar (vía tesis) en la comprensión de teoremas que involucran a las respectivas nociones teóricas encuentra, en este marco reticular inclusivo, una explicación natural. Efectivamente, si se entiende la elucidación como práctica (cuya peculiar naturaleza estructural podrá ser apreciada mejor en el apartado próximo), dada la coexistencia activa de ambos conceptos (o, para ser más precisos, de las respectivas prácticas que

[25] Una consecuencia natural de estas observaciones es el potencial didáctico del recurso a los procesos elucidatorios y a sus diversas etapas; más aún: una reconstrucción de esta naturaleza permite atribuir papeles específicos, en términos de enseñanza, a diversos aspectos conceptuales en función de su contribución o posición en el cambio conceptual elucidatorio. Por ejemplo, reflexiones y propuestas acerca de cómo diversas definiciones o caracterizaciones matemáticas del concepto de función pueden contribuir en la enseñanza de la disciplina se encuentran en Malik (1980) y Kleiner (1993); enfocar tal variedad en términos elucidatorios (labor que escapa largamente a mi competencia) quizá posea interés pedagógico e histórico; en este último aspecto resulta especialmente estimulante la lectura de Youschkevitch (1976).

los incorporan) en diversos estratos de conocimiento, es perfectamente armónica la "activación" del concepto preteórico en la decodificación de resultados que involucran, exclusivamente, desde el punto de vista literal, de su escritura, el concepto teórico respectivo. Dicho en forma breve: la "activación" de la tesis respectiva en la comprensión (y en la propia motivación conceptual) del teorema. Un ejemplo paradigmático: la dinámica de la Tesis de Tarski respecto del Teorema de Completud de la lógica de primer orden, que sustenta la interpretación estándar del mismo[26].

En tercer lugar, la comprensión de la elucidación como práctica matemática ofrece una explicación satisfactoria de un hecho incontrovertible: la crítica elucidatoria del concepto teórico, basándose en rasgos propios del concepto preteórico, emergente en momentos históricos muy diversos. Si la aparición del concepto teórico tuviese como efecto la destrucción absoluta (es decir, en todos los estratos cognitivos) de la práctica encarnada por el concepto preteórico anterior, ¿cómo explicar tales irrupciones del pasado en el presente? Salvo la apelación a una resurrección milagrosa, el fenómeno de crítica elucidatoria referido parece no encontrar una explicación directa; la intelección de tales procesos, entendidos en el marco de la coexistencia activa e interacción de prácticas, ofrece en cambio una alternativa intelectiva sólida. Pueden brindarse diversos ejemplos de tales críticas; apenas para citar tres casos: la crítica a las construcciones rigurosas habitualmente reconocidas como contrapartida del concepto preteórico de computabilidad[27], la crítica a la noción formal de demostración (*qua* elucidatum exitoso) [28], la crítica a la noción teórico-modélica de consecuencia lógica (*qua* elicudatum exitoso)[29].

Estas diversas líneas argumentales respaldan una conclusión: la descripción de los procesos elucidatorios como prácticas matemáticas (en la acepción estudiada aquí) permite una mejor comprensión de aquellos como procesos de cambio y de su dinámica específica en el contexto matemático. "Cambio" y "dinámica" (como aquí se los entienden) son realidades que interactúan, aunque en los casos históricos específicos tal interacción puede adoptar modalidades muy diversas. Por ejemplo, en algún caso el cambio elucidatorio resulta condición de jerarquización de un teorema

[26] El problema es señalado, específicamente, por Etchemendy (1990). Diversos autores han razonado sobre el mismo -por ejemplo: Alchourrón (1995) y Seoane (2001).

[27] La tesis de Church, seguramente, es la estrella indiscutida; por aspectos históricos puede leerse, por ejemplo,Értola Biraben (1996); una rica recopilación de trabajos se encuentra en Olszewski, A., Woleński, J., Janusz, R. (eds.) (2006). Ejemplos de crítica elucidatoria a esta tesis son, entre otros, Kalmar (1959), Lee Bowie (1973) y Rescorla (2007).

[28] La tesis de Hilbert ha merecido amplia atención, incluso en manuales de lógica (por ejemplo: Boolos et alt. (2007)). Por un enfoque histórico puede leerse Berk (1982). Discusión más reciente puede encontrarse, por ejemplo, en Antonutti Marfori (2010) y Kahle (2018).

[29] Sin dudas Etchemendy (1990) elaboró un ataque profundo a la tesis de Tarski; posteriormente, ha tenido lugar un intenso debate al respecto -véase, por ejemplo, MacGee (1992), Ray (1996), Chihara (1998), Gómez Torrente (2008) . Como antecedentes críticos se han citado a Pap (1958) y Kneale y Kneale (1968).

(impactando de un modo estelar en su interpretación) y en otros casos la reinterpretación generada por el éxito elucidatorio posee una menor espectacularidad; puede así suponer un impacto fuerte en la actividad de investigación y significar una reconfiguración de la actividad educativa (en cierto nivel) y, a la vez, convivir pacíficamente con prácticas anteriores, conservando estas su potencial formativo (en otros niveles de la enseñanza).

6.

Las diversas prácticas hasta ahora analizadas son identificadas, naturalmente, como patrones de actividad por parte de la comunidad matemática -entendida en el sentido amplio que se ha asumido aquí. No obstante, estas no son las únicas prácticas relevantes en la perspectiva de Ferreirós. A las prácticas matemáticas antes descriptas, se le suma un tipo original de prácticas: las *prácticas técnicas*. Según nuestro autor estas se caracterizan así:

> By a *technical* practice I mean a recognizable type of activity that is done—and can be taught and learned—by human agents, involving direct manipulation of objects in the world, through the use of human-made instruments. (Ferreirós 2016: 40-41)

"Medir", en tanto práctica técnica, es la mesura específica, concreta a través de unidades convencionales -como "pies" o "codos". No se trata de la estructura teórica subyacente. "Dibujar las formas geométricas", entendida como práctica técnica, consiste en, por ejemplo, la maestría en el uso de los instrumentos clásicos para trazar figuras con fines prácticos. "Contar", en esta clave, es la técnica que se nos enseña cuando niños para coordinar, por ejemplo, dedos de la mano y objetos, empleando los numerales en forma oral. Según el autor, Hermann von Helmholtz identificó contar y medir como procedimientos que se encuentran en la base de la matemática; Ferreirós agregaría a ellos la práctica de trazar figuras geométricas[30]. Debe subrayarse que el filósofo distingue en forma neta prácticas técnicas y prácticas matemáticas: "…I do not consider the procedures of counting, practical measuring, or practical geometrical drawings as mathematics." (pág. 113)

[30] Véase Ferreirós (2016), pág. 113. En el capítulo 5, la sección 5.1 se dedica al tránsito desde las prácticas técnicas a las matemáticas.

Un componente decisivo para describir el contraste entre ambos tipos de prácticas es la naturaleza esencialmente teórica de las últimas y el carácter de *techné* de las primeras. Ferreirós señala específicamente la vocación de "intervención directa" en el contexto circundante de estas últimas. Y agrega:

> One difference between those technical practices and mathematics is that the latter adds a new layer of symbolic frameworks, a mediating system of representations that creates distance from immediate action on the world of objects and at the same time opens new possibilities for exploration. (Ferreirós 2016: pp. 113-114)

La nueva "capa" representacional o expresiva introducida por la perspectiva matemática supone una novedad doble; por una parte, en tanto mediación o representación o conceptuación originales, y, por otra, en tanto apertura de posibilidades inéditas de indagación de lo representado. Pero, como se encarga de subrayar Ferreirós, este recurso a la innovadora representación simbólica (escrita) no es suficiente para esclarecer la diferencia entre práctica matemática y práctica técnica. Caracterizan a la primera el *tópico* y el *enfoque*. En relación con el tópico, remite el autor al viejo par Número/Figura (e "hibridaciones" resultantes). En relación con el enfoque, nos recuerda el filósofo

> …that mathematics begins when a step is taken toward theoretical knowledge, characterized by the exactness of results, and the peculiar nature of the goals and values that guide it. Theory is often also characterized by idealization. (Ferreirós 2016, pág. 114)

Un desarrollo cuidadoso del contraste entre los dos tipos de prácticas considerados excede largamente este ensayo; el punto original y decisivo aquí es la tesis de Ferreirós acerca de cómo se relacionan ciertas prácticas técnicas con ciertas prácticas matemáticas (cursivas J.S.):

> The idea is that, at the basis of mathematical knowledge and understanding, there lie other practices that are not mathematical, properly speaking: the techniques (technical practices) of counting, measuring, and drawing geometrical forms. This would seem to imply that the cognitive abilities and resources that are necessary for such practices *will be found necessary for doing mathematics*. (Ferreirós 2016: 42)

Una interesante ejemplificación de esta tesis general es propuesta por Ferreirós a través de la siguiente figura[31]

A. Counting practices / reckoning arithmetic / structure of N
B. Measuring practices / fraction arithmetic / proportion theory
C. Practical geometry / Euclidean geometry / Cartesian geometry

Figura 7

Es razonable calificar el "cálculo aritmético" como práctica matemática, el punto es cuál es la relación entre la práctica técnica (propiamente: no matemática) de "contar" y tal práctica matemática de "calcular" aritméticamente. Observaciones análogas podrían efectuarse respecto de los ejemplos B y C; en general: ¿cómo se relacionan las prácticas técnicas con las prácticas matemáticas correspondientes?

El lector seguramente advirtió que las cursivas en la cita que precede a la figura realzan una articulación poderosa entre ambos tipos de práctica: las técnicas son "necessary found for doing mathematics". Este fundamento posee carácter genético, podría decirse, apunta a la preeminencia histórica, pero esto no lo es todo: resultan fundamentos *epistemológicamente* informativos. Luego tal articulación o tránsito admite una reconstrucción histórica filosóficamente relevante. Desde el punto de vista de Ferreirós, tal relevancia se relaciona, por ejemplo, en relación con la aritmética, con una tesis central: la provisión a esta de garantías máximas (certeza) por parte de tales fundamentos. Así mismo, puede entenderse provista de este doble interés, si se retorna al caso A, la relación entre la práctica matemática de calcular, y, por ejemplo, el esfuerzo axiomático formal de captar la estructura de la aritmética (digamos: la Aritmética de Peano). Ciertos procesos de cambio matemático, como se

[31] Véase Ferreirós 2016: 39.

ha señalado antes, pueden considerarse como procesos elucidatorios y, en la perspectiva adoptada aquí, como prácticas matemáticas. En el caso particular, podríamos ilustrar la situación así (introduciendo la terminología elucidatoria)

transición 1 transición 2

Contar (práctica técnica) - Calcular (práctica matemática preteórica) - AP (práctica matemática teórica)

Figura 8

Se tendrían así dos "transiciones" o "mudanzas", que suponen cambio matemático -aunque debe retenerse que de lo que se trata aquí no es de la imagen tradicional de "sucesión" sino de la emergencia de un cierta articulación o estado novedoso de la red de prácticas en cuestión. La transición 1 procura dar cuenta del pasaje o el tránsito desde prácticas técnicas a prácticas matemáticas; podríamos decir que se trata de un especial tipo de práctica que, a su vez, articula o relaciona prácticas de muy distinto tipo, haciendo emerger una novedad matemática. A los efectos de facilitar la labor de referirla, la denominaremos "relación o proceso de *matematización*". La transición 2 es, obviamente, lo que hemos denominado "elucidación matemática": refiere a la articulación de una cierta práctica matemática (valiosa pero insatisfactoria, para la sensibilidad rigorista de un cierto contexto histórico) a otra práctica que se propone rigorizar la primera. Como se ha sugerido a lo largo de estas páginas, es fecundo entender esta última como una modalidad o tipo de práctica matemática -nótese que esta aproximación al esfuerzo elucidatorio lo muestra, nuevamente, como una *forma* de cambio matemático. Se trata luego de un proceso que, por decirlo así, se encuentra en un estrato de generalidad diverso que las prácticas que enlaza. Es una práctica matemática que "articula" o "relaciona", a su vez, prácticas matemáticas. Otra forma de decirlo: es una práctica matemática de "segundo orden", que modela una forma de "cambio" matemático, de un nivel de generalidad mayor que las prácticas que articula, pero aún notoriamente inferior a aquel propio, por ejemplo, de los marcos totalizadores. Esta visión de la práctica elucidatoria, como práctica matemática, la ubica así en un lugar especialmente interesante.

Por una parte, es necesario diferenciarla de aquella práctica matemática por antonomasia (la *demostración*) y, por otra, de esta nueva modalidad de cambio propuesta por Ferreirós y que bautizamos como *matematización*.[32] La comparación entre estas tres formas o modalidades de innovación matemática resulta prometedora en diversos frentes, entre otros, respecto al desarrollo de una inteligencia más profunda de los procesos elucidatorios.

7.

Una conjetura que podría adelantarse, sin asumir riesgos mayores, es la siguiente: en el nivel arriba descripto, hay por lo menos tres modalidades destacadas de emergencia de novedad matemática, a saber, la provocada por obra de las matematizaciones, la provocada por obra de las elucidaciones, la provocada por obra de las demostraciones. Aunque resulte obvio, quizá convenga establecerlo en forma neta: estas tres, por supuesto, no agotan las modalidades de emergencia de novedad en matemática.

Si se concentra la atención en el ejemplo A, se pueden aislar dos tipos de procesos: *matematización* y *elucidación*. Como se señaló en el apartado anterior, el estudio de cada uno de ellos en sí parece altamente significativo y, además, su comparación puede resultar mutuamente esclarecedora.

Cabe resaltar que las prácticas técnicas (en opinión de Ferreirós) movilizan, en un cierto contexto, capacidades básicas comunes o “promedio” del agente matemático. En particular, este autor expresa que

[32] Una discusión especialmente interesante de este peculiar tránsito puede leerse en Ferreirós (2016), pp. 113-117.

> There is good evidence that counting (like spatial reasoning) invokes basic cognitive abilities that are hardwired in specific brain areas. (Ferreirós 2016: 65)

La investigación en ciencia cognitiva y neurociencia ha progresado en las últimas décadas y sus resultados

> … has provided stronger evidence for the existence of specific neural circuitry involved in processing basic numerical knowledge, allowing mammals to *subitize* small numbers of things (i.e., directly grasp numbers up to about 4); there is also evidence for what Dehaene called an "accumulator," brain circuits for grasping approximatively and somewhat qualitatively larger numbers. (Ferreirós 2016: 65)

Estos elementos conducen, según nuestro autor, a algo así como una "innate intuitive notion of numerosity", tal noción estaría en la base de una comprensión más sofisticada de la cardinalidad (de una colección de objetos). Dicho en forma muy estilizada, parecería que tales capacidades innatas más ciertos procesos culturales (en sentido amplio) producirían la noción (matemática) de número. Este tipo de procesos, obviamente, es lo que llamamos (en la terminología de este ensayo) matematizaciones. Una primera observación a tener en cuenta es que esta suerte de punto de partida no debe confundirse con una noción intuitiva de número: Ferreirós se preocupa por establecer ese límite en dos movimientos. En primer lugar, la aparición del concepto propiamente matemático supondría la capacidad de concebir o determinar prácticamente "cuántos", con independencia de la magnitud. Podríamos decir, representaría un cierto nivel de abstracción propio de la noción matemática. En sus palabras

> …size should not constitute an in-principle problem for the precise grasp of numbers (which is compatible with the obvious fact that no oral language possesses the means to determine very large numbers) (Ferreirós 2016: 66)

Merece destacarse la aparición del lenguaje escrito como condición para la emergencia de este refinamiento conceptual: sin ese instrumento, dicho logro resultaría imposible (a la luz de la evidencia disponible). El segundo movimiento consiste en una suerte de operacionalización del criterio abstracto requerido antes; conjetura Ferreirós que la presencia de tal refinamiento equivale al requerimiento que números mayores que un cierto límite puedan precisarse y distinguirse (determinable en resultados de la psicología cognitiva). Es decir, si un individuo o un miembro "promedio" de una comunidad satisface tal requerimiento, podríamos atribuirle la posesión del concepto de número. Adviértase que, para el caso de la práctica técnica de contar, se sugieren así el "punto de partida", aspectos del proceso y la condición de "punto de llegada" (es decir, la emergencia del concepto matemático).

Sin embargo, quizá debiera advertirse, siguiendo la perspectiva de Ferreirós, que entre la posesión del concepto (matemático) de número y ciertas habilidades aseguradas por el equipamiento innato (esa especie de "instinto de numerosidad"), conviene identificar, aún en el plano técnico, una etapa intermedia: la adquisición de una noción o concepto (protomatemático) de número. Sería este el que permitiría, por ejemplo, una comprensión y utilización eficiente por parte del agente, dentro de los límites propios de aquel plano, del conjunto de habilidades técnicas correspondientes, cuya explicación exige más que la mera apelación al mecanismo innato. Expresado en forma estilizada: no meramente la disposición innata, sino una habilidad cognitiva desarrollada, que se encuentra en la "base" de lo que podríamos denominar "aritmética intuitiva". Operaría así, puesto en forma rápida, el papel de "fundamento" epistémicamente relevante del concepto protomatemático en relación con el matemático. Como es evidente, las matematizaciones poseen en sí mismas el mayor interés; se trata de procesos densos y desafiantes para la comprensión histórica y filosófica. Giardino, apoyándose en resultados de la ciencia cognitiva en tres fuentes (la etología y la cognición en animales no humanos, el estudio en bebés y pre-escolares, la antropología cognitiva y el análisis de poblaciones sin escritura o con lenguaje comparativamente rudimentario) sugiere la existencia de tres niveles de "competencia aritmética": el nivel I supone "la capacidad de distinguir entre diferentes numerosidades", el nivel II requiere "la capacidad de contar", en el nivel III "encontramos la aritmética como la conocemos". Escribe esta autora

> En esta reconstrucción, el segundo nivel es el más relevante, ya que es en este nivel que naturaleza y cultura interactúan de una manera más visible y activa: es aquí donde se desarrollan prácticas simbólicas, se crean artefactos cognitivos, y los seres humanos se confían a representaciones externas y potencialmente públicas, lo que les permite no solo mejorar sus capacidades, sino también compartirlas con el resto de la comunidad y por lo tanto allanar el camino para su futuro desarrollo. (Giardino 2016: 47)

Este tipo de indagaciones evidencia la complejidad de esta etapa técnica en un caso particular y, a la vez, la riqueza y potencial iluminador de su estudio. Como es evidente, una comprensión mínimamente aceptable de las matematizaciones no forma parte del propósito de este ensayo. No obstante, una primera (y en extremo estilizada) aproximación al contraste entre estas y las elucidaciones puede captarse a través del siguiente esquema:

matematización elucidación

Concepto prematemático Concepto preteórico Concepto teórico

Figura 9

Una consecuencia inmediata se desprende de este esquema: mientras las elucidaciones residen enteramente en el campo matemático, las matematizaciones suponen articular el campo técnico y el campo matemático. Un corolario de esta observación simple es que tal diferencia pone de relieve un contraste fundamental entre estas dos modalidades de irrupción de novedad matemática: aunque ambas suponen la emergencia de una práctica matemática novedosa, las primeras implican un salto cualitativo primigenio (hacen aparecer matemática, en una "locación" de la red, donde aquella no existía), las segundas conllevan una suerte de avance gradual (en términos de rigor, precisión, etc.). Dicho en forma grosera: las primeras son responsables, por ejemplo, de la aparición de la aritmética, las segundas son, por ejemplo, responsables de la aparición del concepto conjuntístico de función.

Si pretendemos continuar refinando la comparación, a los efectos de colaborar en la mejor inteligencia de los procesos elucidatorios, dos aspectos merecen destacarse.

La opción reticular inclusiva, introducida por Ferreirós, estimula una mirada más rica a estos diferentes modos de emergencia de la novedad matemática. ¿Por qué? Porque el enfoque secuencial posee una consecuencia no frecuentemente advertida: las etapas anteriores solo se recuperan en tanto pervivencia *en* las posteriores. Es decir, los cambios suelen (en general) combinar dosis de continuidad y ruptura. Cuando los cambios se entienden radicales, la primera decrece sensible o absolutamente. Pero aún en cambios más "preservadores", más "continuistas", hay un tipo de dinámica que, difícilmente, estimula la perspectiva secuencial excluyente, a saber: *la interacción entre etapas/prácticas/estratos cognitivos previos y su sucesor*. Esto puede traducirse groseramente así: cuando estudiamos (desde la perspectiva reticular inclusiva) las matematizaciones (o las elucidaciones) no interesa exclusivamente la dirección "progresiva", "temporal". No importa exclusivamente cómo se transita desde la noción prematemática a la noción matemática, desde la noción preteórica a la teórica. Por supuesto, resulta legítimo y fecundo preguntarse cómo operan las primeras sobre las segundas. La atención a estos efectos, como ya se discutió, son notorios en la discusión elucidatoria. Pero hay otro aspecto digno de estudio: cómo se transforman aquellas prácticas persistentes. En cierta forma, la imagen reticular inclusiva, supone una interacción entre prácticas y entre estratos de conocimiento, que eventualmente produce otras *alteraciones*, es decir, que involucran diversos niveles de la red. Una cuestión interesante (desde el punto de vista del estudio elucidatorio) es *cómo puede eventualmente alterarse la práctica preteórica en el transcurso histórico*. Es decir, cómo se producen interacciones explicativas de una economía de "ajustes", que involucra no exclusivamente el concepto teórico, sino que envuelve al concepto preteórico. En Seoane 2003b se introdujo, como se dijo, la noción de *reformulación*, a los efectos de captar este impacto, en la dinámica del proceso, del concepto teórico sobre el preteórico[33].

Ferreirós apunta a una cuestión similar, relacionada con las prácticas técnicas, que envuelve una complejidad mayor (itálicas J.S.):

> Mathematical practices, properly speaking, such as reckoning arithmetic and other more sophisticated forms of number theory, are of course linked with the concrete practice of counting. But they go far beyond it. It is possible *to reinterpret counting practices from an advanced mathematical standpoint*, but this can only be done from the vantage point of modern math with its characteristic assumptions. The advantages are bought at the price of assuming the hypotheses on which advanced mathematics is founded…; the conceptual

[33] Seoane 2003b, pág. 28.

> clarity and precision of the analysis is paid for at the price of foundational difficulties.
> (Ferreirós 2016: 73)

La práctica protomatemática de contar permite y fundamenta, como se ha visto, la práctica matemática aritmética: hasta aquí la dirección “progresiva”. Pero es posible “to reinterpret counting practices”. ¿Cómo? En cierta forma, operando en reversa y mediante una suerte de cierre transitivo: dado el vínculo de la práctica correspondiente al “advanced mathematical stand point” con la práctica aritmética y, nuevamente, de esta última con la práctica de contar. La idea central aquí, desde un punto de vista metodológico, es este “cierre transitivo” que, en ciertos casos, permite una articulación relevante entre concepto o práctica teórica y…práctica protomatemática. La cuestión de cómo opera en el caso de la aritmética y sus consecuencias fundamentales en relación con el problema fundacional y la certeza matemática excede el objetivo este ensayo. Pero la lección metodológica es clara: evidencia una modalidad novedosa de impacto del trabajo elucidatorio, a saber, las (eventuales) consecuencias, ya no exclusivamente del concepto teórico sobre el preteórico, sino del concepto teórico sobre la noción protomatemática (vía el concepto preteórico). Y la relación inversa: el impacto del nivel protomatemático (es decir: la práctica técnica) sobre el concepto teórico (vía el concepto preteórico). Esta última articulación parece sugerir una modalidad de evaluación elucidatoria inédita, pues resultaría natural pensar que el éxito reinterpretativo (usando la terminología de Ferreirós) evidencia o supone alguna medida de éxito elucidatorio. ¿Cuánto pueden enseñarnos estos fenómenos? La respuesta a esta cuestión requiere un trabajo conceptual cuidadoso, fuertemente atento a la evidencia empírica.

En general, comprender globalmente la “red de prácticas” supone atender, entre otros factores, al equipamiento neuropsicológico de los individuos, la interacción social en el contexto comunitario y los formatos comunicacionales disponibles. En particular, cuando se procura pensar la especificidad de la interacción de los procesos elucidatorios en tal red, el filósofo debe elaborar conjeturas que sepan dialogar con las diversas disciplinas involucradas en aquella comprensión y, consecuentemente, sus hipótesis poseerán una manifiesta sensibilidad empírica.

8.

La orientación heurística o metodológica del concepto propuesto de elucidación matemática ya aparece en trabajos previos (especialmente: Seoane 2017); un indicador de tal preferencia es la opción por dejar abierta, en su caracterización, la modalidad o técnica elucidatoria particular -véase el punto 2 de la sección 2. Esto no equivale a desvalorar la discusión al respecto: en Seoane 2003b se sugieren algunas modificaciones a la opción tarskiana y se argumenta a favor de su superioridad respecto de la modalidad quineana[34]. La perspectiva delineada aquí posee, simplemente, otro objetivo: se trata de privilegiar una noción *esquemática* o *estructural*, que sirva cono herramienta de exploración filosófica y/o histórica, susceptible de inspirar un trabajo “de campo” y estimular, gradualmente, un esfuerzo de generalización más ambicioso. La adopción de una comprensión de tal noción como práctica matemática no hace sino proveer un renovado sustento a esa opción a la vez que enriquecer considerablemente su agenda.

Para potenciar el uso metodológico de la noción propuesta de elucidación matemática - explotando en forma decidida su comprensión como práctica matemática- puede resultar útil resumirla así.

La elucidación matemática, puesta en forma muy estilizada, es una *relación conceptual* y, comprendida en forma más cabal, es un *proceso* o, mejor, una *práctica*.

A los efectos de representar la primera aproximación podría pensarse la misma como una quíntupla:

<PPT, L, PT, L, RE>

donde

“PPT” significa práctica preteórica.
“L_1”significa el lenguaje marco en que se desenvuelve esa práctica preteórica.

[34] Este debate tiene su origen en la célebre discusión ya aludida Coffa-Simpson.

“CT” significa concepto teorico.
“L_2” significa el lenguaje marco en que se desenvuelve esa práctica teórica.
“RE” significa la relación elucidatoria pretendida.

Pero, dada la complejidad del desafío, puede resultar útil (dependiendo de los contextos) principiar por una aproximación como

<CPT, L, CT, L, RE>

donde

“CPT” significa concepto preteórico.
“L_1”significa lenguaje en que se formula el concepto pre-teórico.
“CT” significa concepto teorico.
“L_2” significa lenguaje en que se formula el concepto teórico.
“RE” significa relación elucidatoria pretendida.

Como se advirtió, ¨concepto” es tomado en un sentido lato (teoría informal, teoría axiomática, teoría axiomática formal, …) y, más importante, es entendido como parte de la práctica que lo anima. A los efectos de orientar la utilización del esquema anterior y estudiar en forma más fina el proceso, es decir, la práctica matemática elucidatoria, puede ser útil reparar en un elenco (abierto) de cuestiones:

¿Por qué elucidar cierto concepto (en matemáticas)?
¿Cuál es el concepto pre-teórico?
¿Cómo metodológicamente puede identificársele?
¿Cómo metodológicamente puede esclarecerse?
¿Cuál es el concepto teórico?
¿Cómo metodológicamente puede identificársele?
¿Cuál es la técnica o modalidad elucidatoria asumida?

¿Cómo pueden describirse las condiciones sustantivas?
¿Cómo pueden describirse las condiciones epistémicas?
¿Cuáles son las diferencias entre L_1 y L_2 (si existen)?
¿Cómo varían o se continúan las prácticas vinculadas al concepto preteórico al proponerse el concepto teórico correspondiente?
¿Pueden identificarse, en determinados momentos del proceso, reformulaciones del concepto preteórico?
¿Cuáles han sido los mecanismos de justificación puestos en obra?
¿Podrían existir otros?
¿Cuáles han sido las críticas elucidatorias?
¿Cuáles podrían ser las críticas elucidatorias?
¿Cómo dialoga el resultado elucidatorio con el contexto matemático?
¿Cómo dialoga con la teoría en cuestión?
¿Cómo dialoga con los teoremas en cuestión?
¿Cómo dialoga con otras prácticas?

Esta combinación de un "retrato estructural" (aproximado) más una orientación de su aplicación a través de un "elenco abierto de interrogantes" (que, además, supone un enriquecimiento de las dimensiones captadas en aquel), se inspira en la estrategia corriente de caracterización de clases argumentales y, más específicamente, de falacias, originada en su tratamiento desde un ángulo pragmático[35]. Pero tal estrategia se ha visto asimismo beneficiada por el análisis de la práctica matemática en términos del par <marco, agente>, propuesto por Ferreirós[36]. Según este autor

> Mathematical practice always involves communities of agents in interaction, and a diversity of theories or frameworks, linked and combined skillfully so as to produce results such as problem solutions, theorems, and proof-methods. (Ferreirós 2016: 44)

Estos dos componentes captan el "corazón" de la práctica, pero esta no se reduce al par. Ferreirós distingue en relación con el marco, la dimensión simbólica y la dimensión teórica. Resume así qué aspectos recogen una y otra:

[35] Véase, por ejemplo, Tindal (2007).
[36] Véase Ferreirós (2016), especialmente el capítulo 3.

> …we have highlighted three elements in symbolic frameworks: ideograms, I, technical expressions, E, and symbolic methods, M_S —where ideograms can be diagrams too, and the (optional) symbolic methods have to do with their manipulation. In the case of theoretical frameworks, we have emphasized four elements: statements or propositions, S, proofs, P, theoretic or proof methods, M_P, and open questions, Q, including conjectures. (Ferreirós 2016: 55)

Como es obvio, no puede trasladarse mecánicamente cada aspecto considerado a la indagación elucidatoria pero, en el contexto de una utilización flexible y altamente sensible a la evidencia histórica de la herramienta propuesta, estos diversos componentes merecen incorporarse a la pantalla de radar del investigador. Ferreirós distingue, como se refirió, entre marco simbólico y marco teórico. El primero recoge los medios a través de los cuales se simboliza y se produce la comunicación matemática; es en tal contexto que distingue aquellas tres categorías. "Ideogramas" son los símbolos gráficos, ya sean "convencionales" o "icónicos"; tal clase es suficientemente hospitalaria para albergar el lenguaje natural, las notaciones técnicas, las fórmulas, los diagramas, las figuras geométricas, … En síntesis, dicha categoría recoge el "abecedario" gráfico puestos en obra en la comunicación matemática. Las "expresiones técnicas" aparecen usadas en el contexto de los recursos propios del lenguaje vernáculo, pero poseen un sentido matemático preciso; en la geometría euclídea "línea recta" o "plano" son ejemplos de ellas. Como bien señala el autor, tales expresiones permiten establecer un "puente" entre marco simbólico y teórico. Los "métodos simbólicos" se refieren a la manipulación del conjunto de los recursos expresivos. Como es obvio, existe una diferencia relevante entre lenguajes vernáculos (con expresiones técnicas) y lenguajes formales; en general, diversos aspectos vinculados a la codificación y expresión matemáticas merecen una dosis considerable de reflexión. Pero el punto a resaltar aquí es que estas distinciones y su elaboración en el contexto general de la conceptualización de la práctica matemática suponen un enriquecimiento muy concreto (en término de herramientas) en la identificación y análisis de los procesos elucidatorios. A los solos efectos de ejemplificar este aserto, adviértase cómo pueden impactar las anteriores disquisiciones en la comparación entre L_1 y L_2, permitiendo así apreciar niveles de originalidad y variación expresiva epistémicamente relevantes.

Consideraciones análogas pueden formularse respecto al marco teórico: la percepción (eventual) de un contexto más amplio en el cual se inscriben los procesos elucidatorios (por ejemplo: problemas abiertos, conjeturas o teoremas) estimula el estudio de las interacciones entre esos procesos y su contexto, ya impactando en tales elementos, ya encontrando en ellos motivaciones fundamentales. Aún una mirada rápida a las interrogantes listadas arriba permite apreciar la importancia otorgada, en el análisis elucidatorio, a la comunidad matemática -el agente, en la terminología de Ferreirós. Aprovechando las distinciones ofrecidas por este autor, cabría decir que el agente se entiende, fundamentalmente, como "actor histórico"; Ferreirós advierte otras dos alternativas para su comprensión: "considering ´super-normal´ agents or geniuses" o "research schools or mathematical traditions".

Seguramente el lector advirtió al recorrer las interrogantes reunidas arriba, la existencia de una preocupación por atender no exclusivamente a los aspectos lingüísticos de los procesos elucidatorios; esta preocupación, aunque quizá en forma relativamente implícita, subyace a la propia concepción de la elucidación matemática como proceso. En la opción de entender este como práctica matemática la misma se hace obvia. Ferreirós hace justicia, adecuadamente, a la importancia de la contribución de Kuhn en esta ampliación del foco de análisis:

> It is characteristic of Kuhn's paradigms to have represented a shift away from the dominant linguistic orientation of his time, for what he termed in 1969 "disciplinary matrices" included elements such as values and exemplars. (Ferreirós 2016: 55)

Como seguramente se recuerda Kuhn 1969 discute dos acepciones de "paradigma"; una de ellas, la de "matriz disciplinaria", posee diversos componentes. Ellos son, precisamente, generalizaciones simbólicas, modelos y ejemplares[37]. Ferreirós reconoce que problemas, métodos y pruebas pueden jugar el papel de "ejemplares" en la práctica matemática; una pregunta interesante es si, además de estos tres fenómenos, cabría incluir en esa enumeración a los procesos elucidatorios. En particular, resulta de enorme interés (desde la perspectiva de este ensayo) la discusión de Ferreirós acerca de la lógica de orden uno como ejemplar[38]. Por ejemplo, entendida la elucidación como práctica, podría

[37] Sigo la traducción de Ribes: Kuhn 1978.
[38] Véase Ferreirós (2001).

conjeturarse que, los esfuerzos de Turing y Church, en el ámbito de la matemática del siglo pasado, constituyeron auténticos “ejemplares” elucidatorios. Dicho de otra forma, la tesis de Church podría quizá considerarse como ejemplar (en relación con las restantes tesis), de un modo análogo a la lógica de primer orden (en relación con las restantes “lógicas”). La justificación de esta observación reclama un estudio histórico y filosófico detallado, pero, en principio, luce altamente plausible.

La lista anterior de cuestiones dista mucho de ser exhaustiva -por ejemplo, no incorpora interrogantes acerca de eventuales novedades en términos de supuestos metamatemáticos en los agentes que proponen el concepto teórico, o no indaga por las formas de apropiación, por parte de la comunidad matemática, de los resultados elucidatorios. La función pretendida de tal lista entonces es más bien modesta: cumplir apenas un papel orientador en el estudio de los procesos elucidatorios. No obstante, en algunos contextos, puede apreciarse directamente su utilidad. Por ejemplo: la cuestión, en apariencia trivial, de la identificación del concepto a elucidar, puede originar preguntas interesantes: ¿es el mismo concepto el que pretenden elucidar Dedekind y Peano?[39], o, si se atiende a la modalidad o técnica elucidatoria, ¿es la misma modalidad la practicada en Tarski (1930) o en Tarski (1936)?[40]

Como quizá resulta ya evidente, la apelación a la quíntupla o la guía heurística de la lista de preguntas, más allá de cuán directamente puedan vincularse a cuestiones surgidas directamente de la discusión del concepto de “práctica matemática”, se enriquece mucho si se las piensa con el telón teórico de fondo de las indagaciones sobre esta. En síntesis, para avanzar en la mejor comprensión de la elucidación matemática parece dibujarse desde ya como la ruta más prometedora aquella que logre combinar, equilibradamente, estudios de casos y reflexión de vocación generalizadora, en un marco reflexivo ampliado y profundizado por la atención a la discusión global de la práctica matemática.

[39] El punto requiere, por supuesto, un análisis histórico cuidadoso, pero parece una conjetura razonable atribuir a Peano, más que una preocupación por el análisis del concepto de *número natural* (que, según este autor, no es definible), un interés por esclarecer el concepto de *teoría aritmética intuitiva*. Se espera enfrentar esta cuestión en trabajos futuros.

[40] La cuestión aparece discutida en Seoane (2002) y (2003a); aunque hoy no suscribiría la totalidad de las conclusiones arribadas en tales trabajos, el contraste metodológico presente en Tarski (en las dos “etapas” entonces identificadas) considero que es defendible.

9.

Finalmente, una especie de coda. Ferreirós formula lo que denomina:

> …*principle of complementarity of symbolic means and thought* in mathematics—each one complemented by the other, neither reducible to the other. (Ferreirós 2016: 91)

Según este autor, el dominio del lenguaje matemático, el apropiarse de los marcos simbólicos no puede lograrse sin una inmersión del sujeto en las prácticas correspondientes y, como ya se ha discutido aquí, el aprendizaje de aquellas requiere "to associate representations and meanings to the formulas" (Ferreirós 2016: 91). El significado, las representaciones que se asocian con las fórmulas y el cálculo no pueden extirparse sin pérdida: la idea de "modelo pretendido" de un sistema formal es apenas uno de los modos en que se evidencia tal conexión. En general, esos procesos de "asociación" o "atribución" de significado distan mucho de ser simples y uniformes: no debería desatenderse, entre otros aspectos, a la importancia de las *formas diversas de codificación de tales significados* así como a las *modalidades de articulación* entre estos y los medios simbólicos. En relación con lo primero: no necesariamente existe (aunque quizá sea el fenómeno más frecuente) una diferencia o "distancia" entre la forma de codificación del significado atribuido y la forma del medio simbólico significativo. En relación con lo segundo: los procesos elucidatorios bien pueden pensarse como una modalidad de dotación de significado a ciertos (fragmentos) de medios simbólicos específicos.

Ferreirós acertadamente nos recuerda el malestar intelectual de Frege y Dedekind respecto a los puntos suspensivos que ocurren en {0, 1, 2, …}. Estos autores sentían que su uso suponía una renuncia al rigor. Observa este filósofo (itálicas J. S.):

> From our multilayered standpoint, which insists on the interplay of different practices and strata of knowledge, there is a natural way of understanding the epistemic role that the dots ". . ." play. *I suggest understanding them as indicators of a systematic link, of an interplay within the web of practices*. They indicate a systematic connection with perfectly well-known, antecedent practices: we know how to count since preschool, and we know very well how to produce the successor of a number once this is given in any notation (be it

> positional, as in Indo-Arabic, or additive, as in Roman numerals; be it decimal or digital). The receiver of that information may also have good knowledge of the systematic role that the successor function plays in a deductive presentation of arithmetic. (Ferreirós 2016: 97)

El pasaje resulta elocuente respecto de una relevante diferencia. Mientras una concepción secuencial excluyente tiende a pensar lineal e insularmente la sucesión de las prácticas, la perspectiva reticular inclusiva subraya su coexistencia e interacción. El "principio de complementariedad" capta bien una idea importante: la emergencia de determinado marco simbólico (altamente valiosos desde el punto de vista matemático), y, en general, de determinada práctica innovadora, simplemente no clausura o elimina absolutamente las precedentes. Mejor: la nueva práctica no se incorpora a una secuencia, sino a una red. Sus vínculos con las precedentes la alimentan y la enriquecen, pues suponen articulaciones con otros estratos del conocimiento (encarnados en dichas prácticas); tal riqueza interactiva supone la vigencia plena del principio de complementariedad. El entramado de esa red es extraordinariamente complejo; los procesos elucidatorios, entendidos tal cual se proponen en estas páginas, ofrecen una "modalidad de entramado" capaz de ejemplificar vívidamente la ineliminabilidad objetiva de la dimensión conceptual de la actividad matemática.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Alchourrón, C.E. 1995 "Concepciones de la lógica", en Alchourrón, C. E., Méndez, J. M. y Orayen, R. (eds) *Lógica*, Enciclopedia Iberoamericana de Filosofía, Madrid: Trotta. 11-47

Antonutti Marfori, A. 2010 "Informal Proofs and Mathematical Rigour", *Studia Logica* 96: 261–272

Barwise, J. 1977 "The Realm of First-Order Logic," in *Handbook of Mathematical Logic*, edited by Jon Barwise. Amsterdam: North Holland Publishers Company, 1977.

Berk, L. 1982 *Hilbert's Thesis: Some Considerations about Formalization of Mathematics*, Doctoral Thesis, Washington University.

Boolos, Burgess y Jeffrey 2007 *Computability and Logic*, Cambridge: Cambridge University Press.

Carnap, R. (1963) *Logical Foundations of Probability,* Chicago: University of Chicago Press.

Carter, J. 2019 "Philosophy of Mathematical Practice. Motivations, Themes and Prospects" *Philosophia Mathematica* (III) 21, nro. 1: 1-31.

Carus, A. W. 2008 *Carnap and Twentieth-Century Thought. Explication as Enlightenment*, Cambridge: Cambridge University Press.

Coffa, A., 1975 "Dos concepciones de la elucidación filosófica." *Crítica VII*, nro. 21: 43-67.

Chemla, K., 2012, The History of Mathematical Proof in Ancient Traditions, Cambridge: Cambridge University Press

Chemla, K., 2012b, "Reading proofs in Chinese commentaries: algebraic proofs in an algorithmic context", in Chemla, K. 2012, pp. 423-486.

Chihara, Ch. 1998 "Tarski´s Thesis and the Ontology of Mathematics", en Schirn, M., *The Philosophy of Mathematics Today*, Oxford: Clarendon Press, 157-172.

Church, A.: 1935, 'An unsolvable problem of elementary number theory' in M. Davis (ed.), The Undecidable, Hewlett, New York, 1965, pp. 89-107.

Ertola Biraben, R.C. 1996 *Tese de Church: Algumas Questões Histórico-Conceituais*, Colecão CLE, vol. 16.

Dutilh Novaes, C. y Reck, E. 2017 "Carnapian explication, formalisms as cognitive tools, and the paradox of adequate formalization", Synthese, 194:195–215.

Etchemendy, J. 1990 *The Concept of Logical Consequence*, Harvard: Harvard University Press.

Ferreirós, J. 2001 "The Road to Modern Logic-An Interpretation", The Bulletin of Symbolic Logic, Vol. 7, No. 4, pp. 441-484

Ferreirós, J. 2016 *Mathematical Knowledge and the Interplay of Practices*, Princeton: Princeton University Press.

Ferreirós, J. y Lassalle Casanave (coordinadores) 2016 *El árbol de los números cognición, lógica y práctica matemática*, Sevilla: Editorial Universidad de Sevilla.

Floyd, J. 2012 "Wittgenstein, Carnap and Turing: Contrasting Notions of Analysis", en Wagner y Beaney (2012). 34-46.

Hempel, Carl G. 1952 *Fundamentals of Concept Formation in Empirical Science, International Encyclopedia of Unified Science*, Vol. II/7. Chicago: University of Chicago Press.

Giardino, V. 2016 "¿Dónde situar los fundamentos cognitivos de las matemáticas?", en José Ferreirós y Abel Lassalle Casanave (2016). 23-49.

Giardino, V. 2017 "The practical turn in Philosophy of Mathematics: a portrait of a young discipline" Phenomenology and Mind 12: 18-28.

Gillies, D. 1992 *Revolutions in Mathematics*, Oxford: Clarendon Press

Gómez Torrente, M. 2008 "Are There Model-Theoretic Logical Truths that are not Logically True", en Patterson, D. *New essays on Tarski and Philosophy*, Oxford: Oxford University Press.

Kahle, R. 2018. "Is There a ´Hilbert Thesis´?", Studia Logica, https://doi.org/10.1007s11225-017-9776-2

Kalmar, L. (1959) "An Argument against the Plausibility of Church's Thesis" en A. Heyting, ed., *Constructivity in Mathematics* (Amsterdam: North Holland).

Kitcher, Ph. 1984 *The Nature of Mathematical Knowledge*, Oxford: Oxford University Press.

Khun, T. S. 1970. *The Structure of Scientific Revolutions*, Chicago: The University of Chicago Press. Primera edición: 1962

Khun, T. S. 1978 Segundos pensamientos sobre paradigmas (trad. D. Ribes), Madrid: Editorial Tecnos. Edición original: 1969 Second Thoughts on Paradigms, Urbana: The University of Illinois Press.

Kleiner, I. (1993) Functions: Historical and Pedagogical Aspects, Science & Education, 2, 183-209.

Kneale, W. y Kneale, M., 1962 *The Development of Logic,* Oxford: Oxford Clarendon Press. Versión española 1972 *El desarrollo de la lógica*, trad. J. Muguerza, Madrid: Tecnos.

Lakatos, I. 1978 " Falsification and the Methodology of Scientific Research Programmes", en Lakatos, I., *The Methodology of Scientific Research Programmes, Philosophical Papers*, Vol. I (editado por Worral, J. y Currie, G.), Cambridge: Cambridge University Press. 8-101. El artículo originalmente apareció en 1970.

Lee Bowie, G. 1973 "An Argument Against Church's Thesis", The Journal of Philosophy, Vol. 70, No. 3: 66-76.

Malik, M. A. (1980) Historical and Pedagogical Aspects of the Definition of Function, International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 11: 4, 489-492.

McGee, V. (1999): "Two Problems with Tarski's Theory of Consequence", Proceedings of the Aristotelean Society 92, pp. 273-292.

Mendelson, E. 1990 "Second Thoughts about Church's Thesis and Mathematical Proofs", The Journal of Philosophy, Vol. 87, No. 5 : 225-233

Olszewski, A., Woleński, J., Janusz, R. (Eds.) 2006 *Church's Thesis After 70 Years*, Frankfurt: onto verlag.

Pap, A. 1958 *Semantics and Necessary Truth: An Inquiry into the Foundations of Analytic Philosophy*. Hew Haven CT: Yale University Press. Versión española: 1970 *Semántica y Verdad Necesaria*, México: Fondo de Cultura Económica.

Quine, W. O. 1960 *Word and Object*, Cambridge: The MIT Press. Traducción al español: M. Sacristán. *Palabra y objeto*, Barcelona: Labor. 1968

Ray, G. 1996 "Logical Consequence: A Defense of Tarski", Journal of Philosophical Logic, 25: 617-677.

Rav, Y. 1999 "Why do we prove theorems?", PHILOSOPHIA MATHEMATICA (3) Vol. 7, pp. 5-41

Reck, E. (2012) “Carnapian Explication: A Case Study and Critique” en Wagner y Beaney (2012). 96-116.

Rescorla, M. 2007 “Church’s Thesis and the Conceptual Analysis of Computability”, Notre Dame Journal of Formal Logic Volume 48, Number 2: 253-280.

Schlimm, D. 2013 “Axioms in Mathematical Practice”, Philosophy Mathematica, III, 21: 37-92.

Simpson, Th. M. 1975 “Análisis y eliminación: una módica defensa de Quine”, Crítica VII, nro. 21: 69-83.

Seoane, J. 2001, “Cuatro interpretaciones del Teorema de Completud”, en Caracciolo, R. y Letzen, D. (eds.) Epistemología e Historia de la Ciencia, Vol. 7: 467-472.

Seoane, J. 2002, “Consecuencia lógica: la perspectiva tarskiana inicial”, Manuscrito, v.: XXV 1 , p.:69 - 86.

Seoane, J. 2003a, “Consecuencia lógica: la perspectiva tarskiana semántica”, CLE e-Prints, v.: 3 2 , p.:1 - 20, 2003

Seoane, J. 2003b , *Intuiciones y formalismos*, Tesis doctoral, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina.

Seoane, J. 2006 “The concept of Mathematical Elucidation: theory and problems”, CLE e-prints, vol. 6, nro. 4.

Seoane, J. 2017 “On Mathematical Elucidation”, Revista Portuguesa de Filosofía, Vol. 73 (3-4): 1405-1422.

Tarski, A. 1930a “On Some Fundamental Concepts of Metamathematics” in Tarski, A. 1956 *Logic, Semantics, Metamathematics*, Clarendon Press.

Tarski, A. 1930b “Fundamental Concepts of the Methodology of the Deductive Sciences” in Tarski, A. 1956 *Logic, Semantics, Metamathematics*, Clarendon Press.

Tarski, A. 1936 “On the Concept of Logical Consequence”, in Tarski, A. 1956 *Logic, Semantics, Metamathematics*, Clarendon Press.

Tindale, C.M., 2007, *Fallacies and Argument Appraisal*, Cambridge University Press, Cambridge.

Wagner, P, y Beaney, M., 2012, *Carnap´s Ideal of Explication and Naturalism*, Gran Bretaña: Palgrave MacMillan.

Youschkevitch, A. P. 1976, The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century, Archive for History of Exact Sciences, Vol. 16, No