

LOS DIAGRAMAS DEL EUCLIDES DE BYRNE

VALERIA SCHAFFEL

valeriaschaffel@gmail.com

RESUMEN

En 1847 Oliver Byrne publica una llamativa versión de los Elementos de Euclides en la cual los diagramas y colores juegan un rol fundamental. Si bien Oliver Byrne explicita que sus intenciones con esta obra fueron didácticas no se analizará este aspecto de la misma. Tampoco se trata el valor estético y artístico de la obra, el cual fue remarcado en varias oportunidades. Para este trabajo se ha utilizado la edición facsimilar (BYRNE, 2010).

Lo que se propone analizar es el lugar que ocupan los diagramas en su obra en relación con el que tienen en la obra original de Euclides. Para esto se trabajará solamente con el Libro I, por lo que no se pretende afirmar que lo concluido pueda extenderse al resto de la obra.

En primer lugar se realizará una breve descripción de lo que se observa a lo largo del Libro I, lo cual permite formular básicamente dos conjeturas que se relacionan entre sí. La primera de ellas puede expresarse diciendo que en la versión de Byrne las figuras y sentencias de las demostraciones dividen sus roles de un modo distinto al que lo hacen en la versión de Euclides. Es decir, las sentencias en una versión hacen parte del trabajo que en la otra hace los diagramas y viceversa. Si bien se arriba a esta conclusión tras un análisis de estas dos obras en particular, también puede entenderse que lo concluido se debe a características propias de las sentencias y figuras en las demostraciones en general. Como plantea José Seoane las figuras y sentencias en las demostraciones no cumplen roles que no puedan ser intercambiados. “No se trata meramente de sumar elementos de diversa naturaleza; la interacción generada supone una verdadera división de trabajo estructuralmente innovadora. Un rasgo destacado de tal interacción es difuminar las fronteras entre las tareas propias de uno y otro componente ...” (SEOANE). Es decir que a partir de lo concluido tras el análisis hecho se puede también dar apoyo a esta afirmación respecto a sentencias y figuras en general, ya que si sus roles no fueran intercambiables no podrían serlo en este caso en particular.

La segunda conjetura consiste en que si bien, como se verá, en la versión de Byrne los diagramas juegan un papel más importante que en la de Euclides, estos no buscan representar de forma fiel a los objetos en cuestión. Es decir, mientras parecería que Euclides pretende mostrar a

través de los dibujos a los objetos de los que habla, Byrne opta en su lugar porque estos cumplan la función de sentencias recién mencionada.

Palabras clave: Euclides, Byrne, diagramas, demostraciones heterogéneas.

1. DESCRIPCIÓN DEL LIBRO I SEGÚN BYRNE

En la versión de Oliver Byrne de los Elementos de Euclides se puede notar en cada uno de los teoremas un diagrama similar al que aparece en el original de Euclides, pero esta vez sin letras en los vértices de las figuras y con colores en las líneas, en los ángulos y en superficies. En los Elementos de Euclides, los diagramas se encuentran junto a un texto totalmente sentencial; en cambio en el caso de Byrne se encuentra junto a un texto en el que también hay figuras, las cuales aparecen de forma predominante. Se adjuntan en el anexo algunos ejemplos en donde se puede ver esto.

Tras hacer una detenida observación del Libro I de los Elementos en la versión de Byrne se puede notar que todos los diagramas que aparecen junto a las sentencias aparecen también en como parte del diagrama principal. Estos diagramas, entre las sentencias, respetan la orientación y el color que tienen en el diagrama principal. Es decir que si un diagrama es rotado o modificado su color respecto de otro ya no se estarían correspondiendo con la misma parte del diagrama principal. De este modo si tenemos dos diagramas congruentes, uno rotado respecto al otro (o el mismo diagrama de otro color), podemos identificar cuál de ellos se corresponde con qué parte del diagrama original: el que sea una simple traslación respecto al original manteniendo el color. Hay una única excepción, en la que si bien el color se mantiene, la posición no, este es el caso de los segmentos, que aparecen siempre de forma horizontal.

Finalmente, para culminar la descripción del Libro I de los Elementos en la versión de Oliver Byrne, haré una lista exhaustiva de los elementos que aparecen en forma de diagrama entre las sentencias a lo largo del primer libro.

Diagramas elementales del Libro I



Figura 1: Segmentos



Figura 2: Circunferencias



Figura 3: Triángulos



Figura 4: Ángulos



Figura 5: Arcos



Figura 6: Puntos



Figura 7: Circunferencias



Figura 8: Superficies



Figura 9: Cuadriláteros

2. ANÁLISIS DEL LIBRO I SEGÚN BYRNE

Como se dijo, en los Elementos de Euclides, la figura que aparece contiene distintas letras en cada uno de los vértices, lo que permite nombrar a los distintos elementos que aparecen en la figura. Por ejemplo cuando en la parte sentencial de la demostración se quiere referir a un triángulo del dibujo, se lo nombra con las letras que se encuentran en sus vértices. Parecería que en la versión de Byrne la referencia a los elementos del diagrama es sustituida por los propios elementos del diagrama que aparecen entre las sentencias. *Es decir que los propios diagramas* cumplen la función de nombrar.

Podemos preguntarnos si este modo de referir a los elementos de la figura principal es equivalente al modo en que refiere Euclides. Es decir si de un modo u otro de nombrar los elementos de la figura se transmite la misma información sobre esta. Veamos para esto caso por caso.

2.1. Los segmentos

Euclides, tal como ya se mencionó, para nombrar un segmento que aparece en el diagrama lo hace con las dos letras que aparecen en sus vértices. En cambio Byrne coloca el segmento con el mismo color que en el dibujo principal. En principio parecería que el modo de nombrar de Euclides brinda más información, ya que no sólo está diciendo a que segmento del diagrama refiere, sino que

también dice qué relación tiene con otros elementos (como pueden ser otros segmentos, ángulos, puntos o cualquiera de los presentados en la lista anteriormente). Es decir que al nombrar a un segmento como AB , se sabe que en sus extremos se encuentran los puntos A y B , se sabe que este segmento tiene un punto común con AX o BX siendo X cualquier otro punto, se sabe que un ángulo ABX está comprendido por el segmento AB y otro segmento, etc.

Podemos preguntarnos si la versión de Byrne realmente no nos brinda toda esta información que nos proporciona la de Euclides. Para responder a esta pregunta comenzaré analizando sólo la relación entre segmentos y segmentos, dejando las otras relaciones para analizar más adelante. Es decir que para ver si el modo en que Byrne nombra los segmentos nos brinda la misma información, en cuanto a relaciones entre segmentos, que el modo en que lo hace Euclides se debe analizar si la versión de Byrne nos permite detectar cuando un segmento AB comparte un punto con un segmento AX . Veamos como Byrne con el uso de colores se ingenia para transmitir esto:



Estos dos segmentos serían llamados por Euclides como AB y AX informándonos que comparten el punto A , podemos ver que con el modo diagramático de nombrar que emplea Byrne se transmite esta misma información. Aquí no está analizado el caso en que A , B y X sean puntos no alineados, ya que ese caso se reduce al de triángulos que se verá luego.

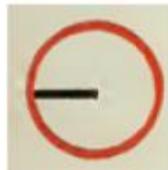
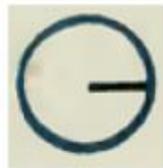
2.2. Las circunferencias

El tercer postulado de Euclides dice: “Y el describir un círculo con cualquier centro y distancia”. Esto asegura que dado un punto y un segmento queda determinada una circunferencia. Por lo tanto al nombrar el centro y el segmento estaríamos nombrando la circunferencia. Esta notación nuevamente nos permite saber la relación que tiene la circunferencia con otros elementos. Analizaré aquí la relación con los segmentos y otras circunferencias, dejando la relación con los otros elementos para cuando los analice a cada uno posteriormente.

Se puede ver que al referir a la circunferencia de centro A y radio AB obviamente podemos saber qué relación tiene esta circunferencia con el segmento AB . Ya que Byrne nombra a las

circunferencias con un diagrama de éstas, nuevamente cabe preguntarnos si este modo de denotarlas nos permite saber lo mismo que la notación de Euclides. Si observamos la notación de Byrne, se puede notar que este diagrama de la circunferencia tiene una característica interesante: siempre contiene un radio. El radio que aparece representado en la circunferencia mantiene un color que luego tendrá ese mismo segmento al ser nombrado en otra oportunidad, permitiéndonos saber que ese segmento es radio de la circunferencia. Un ejemplo de esto puede verse en la Proposición I adjunta en el anexo.

Veamos ahora la relación entre circunferencias. Desde la notación de Euclides podemos nombrar a una circunferencia de centro A y radio AB , y otra de centro B y radio BA . Esta notación nos permite relacionar ambas circunferencias: podemos saber que el centro de cada una de las circunferencias es un punto que pertenece a la otra. Se puede ver con Byrne una vez más se ingenia para transmitir esta misma información con su notación.



Se puede ver que el segmento negro representado en ambas circunferencias es el mismo, ya que es del mismo color, esto nos permite saber justamente que el centro de cada circunferencia pertenece a la otra. Este ejemplo fue tomado de la Proposición I, pero a lo largo del Libro I se pueden ver casos similares, en las que el segmento representado en las circunferencias nos permite saber la relación entre una circunferencia y otra.

2.3. Los ángulos y algunas consideraciones generales

Hasta el momento se vio como la peculiar forma en que Byrne nombra a los segmentos y las circunferencias no nos brinda menos información que el modo en que lo hace Euclides. Luego, tras hacer el mismo análisis con el resto de los elementos que aparecen a lo largo del Libro I se puede

conjeturar lo mismo. No expondré aquí en detalle cada uno de estos análisis ya que sería muy extenso y resultan similares a los dos casos expuestos. Lo que haré es detenerme en el único caso en el que no es posible conjeturar lo mismo.

Euclides nombra los ángulos con tres letras, de este modo si refiere a los ángulos ABC , CBD y ABD , sabemos que los dos primeros ángulos forman al tercero. Veamos si con la notación de Byrne es posible saber esto. Consideremos estos tres ángulos en la notación de Byrne:



Parece claro que último ángulo está compuesto por los dos anteriores. Hasta aquí los ángulos no parecen ser excepcionales. Consideremos ahora lo siguiente, en la notación de Euclides no sólo se sabe lo que se dijo recién, sino que además se conoce la relación entre el ángulo ABC y el segmento AB . Este no es el caso en el sistema de Byrne, se puede ver como ejemplo de esto la Proposición Cinco adjunta en el anexo de donde fueron sacados los ángulos recién mostrados. Si no vemos la figura principal no tenemos modo de saber la relación entre el ángulo amarillo y el segmento azul, cosa que no sucede en la versión de Euclides.

3. EL ROL DEL DIAGRAMA EN BYRNE Y EN EUCLIDES

Como ya es sabido hay proposiciones de los Elementos de Euclides en las que el diagrama juega un rol fundamental, este es el caso de aquellas proposiciones en las que el diagrama no podría ser

extraído sin perderse información. Pero también hay proposiciones en las que el diagrama es totalmente auxiliar y podría quitarse sin afectar a la demostración. En el caso de la versión de Byrne en términos generales se puede decir que el diagrama juega un papel aún más importante que en el de Euclides. Con esto se quiere decir que hay casos en los que Euclides no depende del diagrama en su demostración y Byrne sí. Esto se debe a lo analizado recién, cuando Euclides nombra un ángulo sabemos qué relación mantiene con los segmentos que lo contienen sin necesidad de observar el diagrama, no así en el caso de Byrne. Es decir que en la versión de Byrne la figura principal hace parte del trabajo que en la versión de Euclides hacen las sentencias: nos dice la relación entre ángulos y otros elementos. Esto nos lleva a afirmar que para nombrar un elemento en el sistema de Byrne en el mismo sentido en que lo hace Euclides se necesita no sólo de las figuras que aparecen entre las sentencias si no que también de la figura principal. Se puede concluir que la figura principal de cada proposición en la versión de Byrne juega un papel distinto al que lo hace en la versión de Euclides, no sólo es figura si no que también es nombre, ya que nos proporciona información que en la versión de Euclides nos la brindaban los nombres.

Recíprocamente a lo recién concluido ya se había sostenido que los nombres que se encuentran entre las sentencias en la versión de Byrne son figuras. Es decir que tenemos que en este sistema la figura principal es también nombre y los nombres son también figuras. Dicho de otro modo, mientras que en los Elementos de Euclides tenemos en un nivel nombres sentenciales, en otro nivel figuras, donde aquello que fue nombrado está representado, y por último un nivel donde se encontraría el objeto nombrado y representado, en la versión de Byrne tenemos sólo dos niveles. En el sistema de Byrne no parece posible hacer la distinción entre nombres y figuras. Como se dijo, las figuras en la versión de Byrne son nombres, ahora cabe preguntarnos si al mismo tiempo continúan siendo figuras, es decir si cumplen la misma función que las figuras en la versión de Euclides. Hay un sentido en el que la respuesta es claramente afirmativa. Así como Euclides extrae en algunas proposiciones información de la figura en la versión de Byrne esto se hace de la misma manera. Tal es el caso de la proposición I, donde en ambos casos, a partir de la figura se extrae la información de que ambas circunferencias se intersectan dando lugar al tercer punto del triángulo equilátero. Pero veamos que hay un sentido en el que las figuras de Byrne no son figuras como los son las de Euclides. Euclides, acorde a su concepción material de la geometría, representa en los diagramas a distintos elementos lo más próximamente posible a lo que él entiende que son. Es decir a los puntos como “lo que no tiene partes”, a las líneas como “longitud sin anchura”, y así (EUCLIDES, 1991). Si bien es claro que no es posible representar puntos sin partes o líneas sin grosor

podemos ver que los diagramas de Euclides buscan acercarse lo más posible a este ideal, de modo que estos representen del modo más fiel posible a estos elementos. Por el contrario podemos ver que este no es el caso de Byrne quien hace líneas de color, cosa que no sería posible si estas no tuvieran grosor, de hecho no se hace problema con hacerlas con un apreciable grosor. Se puede ver también lo curiosa que es la representación que hace del punto, que obviamente tiene partes.



Byrne representa al punto tomando parte de todos los segmentos que concurren al punto, esto permite transmitir la relación entre el punto y los segmentos. En el sistema de Euclides, análogamente que con elementos que fueron analizados, un punto es nombrado con una letra lo que permite saber que todo segmento nombrado con esa letra y otra concurren al punto. Se puede ver como Byrne a la hora de representar los puntos prioriza que la representación cumpla la función de nombre, dando la información que dan los nombres en la versión de Euclides, que el ser fiel visualmente a lo que Euclides entiende que es un punto. Parecería entonces que los diagramas de Byrne, en un sentido, son más nombres que diagramas. Es decir, si bien son claramente visuales, cumplen la función que en la versión de Euclides cumplen las sentencias y además no buscan ser una representación visualmente fiel a lo que Euclides entiende que son aquellas cosas que están siendo representadas.

4. CONCLUSIONES

Como se vio, en la versión de Byrne, los elementos que aparecen en la demostración son nombrados con figuras que se encuentran entre las sentencias. También se vio que en el caso de los ángulos la figura principal de la demostración también nombra, ya que esta es la que nos indica la relación entre ángulos y otros elementos. Estas dos cosas nos permiten concluir que los nombres en la versión de Byrne son figuras y que las figuras principales son en parte nombres.

Es decir que en esta versión, nombres y figuras “dividen su trabajo” de un modo que en el original de Euclides. Esto como se adelantó reafirma lo planteado por José Seoane respecto a esta

posibilidad que presentan las sentencias y los diagramas. En segundo lugar se vio no sólo que los diagramas nombran, si no que esta función es priorizada frente a la de representar. Es decir que los diagramas de Byrne ya no pretenden ser fieles a lo que Euclides entiende por punto, recta y otro elementos; si no que buscan cumplir la función de símbolos.

REFERENCIAS

BYRNE, Oliver (2010) *Six Books of Euclid*. Taschen, 2010.

EUCLIDES (1991) *Elementos. Libros I-IV*. Madrid, Gredos.

SEOANE, José (2013) *Imágenes y palabras*. Montevideo, sin editar.

ANEXO

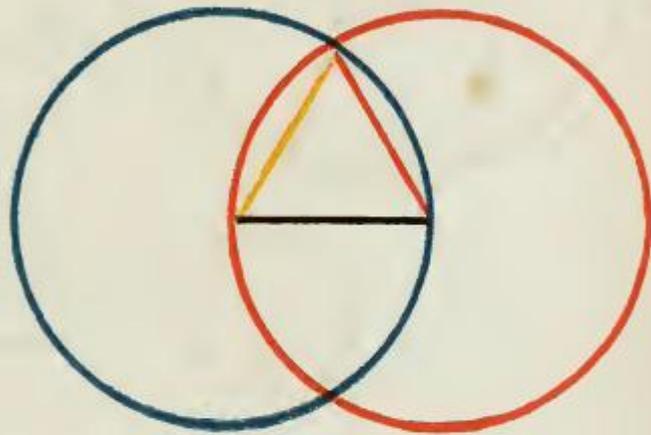


Euclid.

BOOK I.

PROPOSITION I. PROBLEM.

IN a given finite straight line (—) to describe an equilateral triangle.



Describe  and

 (postulate 3.); draw  and  (post. 1.).

then will  be equilateral.

For  =  (def. 15.);

and  =  (def. 15.),

∴  =  (axiom. 1.);

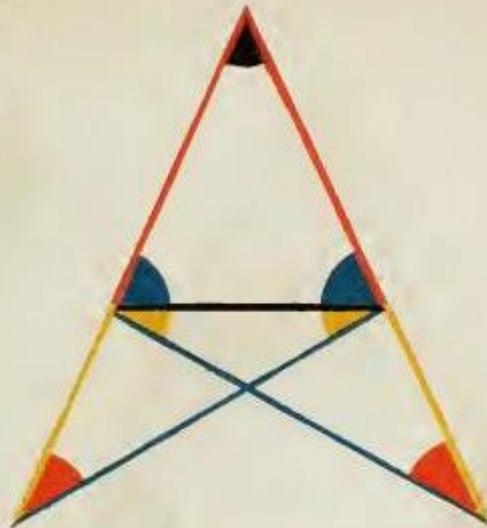
and therefore  is the equilateral triangle required.

Q. E. D.

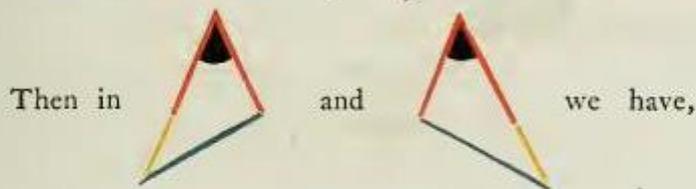
BOOK I. PROP. V. THEOR.

5

IN any isosceles triangle if the equal sides be produced, the external angles at the base are equal, and the internal angles at the base are also equal.



Produce , and , (post. 2.), take = , (pr. 3.); draw and .



= (const.), common to both, and = (hyp.) \therefore = , = and = (pr. 4.).

Again in and we have = , = and = , \therefore = and = (pr. 4.) but = , \therefore = (ax. 3.)

Q. E. D.